

INTEGRALI TRIPLI

Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti integrali tripli:

(a) $\int_A xy e^{xz} dx dy dz$, $A = [0, 2] \times [1, 3] \times [0, 1]$;

(b) $\int_A x dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;

(c) $\int_A (x + y + z) dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x + 1, 0 \leq z \leq x + y\}$;

(d) $\int_A x(y^2 + z^2) dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 \geq y^2 + z^2, x \geq 0\}$.

2. Calcolare il baricentro e il volume dei seguenti solidi omogenei:

(a) $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, (z - 1)^2 \geq x^2 + y^2\}$;

(b) piramide di vertici $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $D = (0, 0, 0)$;

(c) solido del primo ottante limitato dalla superficie cilindrica di equazione $z = x^2/3$ e dai piani di equazione $z = 0, y = 0, 2x + 3y - 18 = 0$.

3. Sia A il solido generato dalla rotazione attorno all'asse z della regione piana:

$$C = \{(x, y, z) : y = 0, x^2 - 1 \leq z \leq (x - 1)^2, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Determinare il volume e il baricentro di A .

4. Dato il solido $C_r = \{x^2 + y^2 \geq r^2, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ determinare il valore del parametro r in modo che il volume di C sia $\pi/8$.

5. Determinare il volume dei seguenti solidi di rotazione:

(a) T triangolo di vertici $(0, 0, 2)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, 1, 1)$ attorno all'asse y ;

(b) $D = \{(x, y, z) : y = 0, x^2 - 4z^2 \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse z ;

(c) $D = \{(x, y, z) : z = 0, 0 \leq y \leq | -1/4 + x^2 |, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse x .

INTEGRALI TRIPLI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Calcolare i seguenti integrali tripli:

(a) $\int_A xy e^{xz} dx dy dz$, $A = [0, 2] \times [1, 3] \times [0, 1]$.

Il calcolo dell'integrale triplo può essere ridotto al calcolo di tre integrali semplici successivi.

$$\begin{aligned} \int_A xy e^{xz} &= \int_1^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 xy e^{xz} dz \right) dx \right) dy = \int_1^3 y \left(\int_0^2 [e^{xz}]_0^1 dx \right) dy = \\ &= \int_1^3 y \left(\int_0^2 (e^x - 1) dx \right) dy = \int_1^3 y [e^x - x]_0^2 dy = (e^2 - 3) \int_1^3 y dy = (e^2 - 3) \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = 4(e^2 - 3). \end{aligned}$$

(b) $\int_A x dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Integrando per strati paralleli al piano xy si ha

$$\int_A x dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} x dx dy \right) dz$$

dove A_z è l'insieme definito dalle disequazioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 - z \\ 0 \leq y \leq -x + 1 - z. \end{cases}$$

Applicando la formula di integrazione per verticali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{A_z} x dx dy &= \int_0^{1-z} \left(\int_0^{-x+1-z} x dy \right) dx = \int_0^{1-z} x [y]_0^{-x+1-z} dx = \\ &= \int_0^{1-z} (-x^2 + x(1-z)) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + (1-z)\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-z} = \frac{(1-z)^3}{6} \end{aligned}$$

e successivamente

$$\int_0^1 \left(\int_{A_z} x dx dy \right) dz = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-z)^3 dz = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-z)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

(c) $\int_A (x + y + z) dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x + 1, 0 \leq z \leq x + y\}$.

Si ha, integrando per fili paralleli rispetto all'asse z

$$\int_A (x + y + z) dx dy dz = \int_D \left(\int_0^{x+y} (x + y + z) dz \right) dx dy,$$

con $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x + 1\}$ e applicando su D la formula di integrazione per verticali, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\int_0^{x+y} (x + y + z) dz \right) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{2x}^{x+1} \left(\int_0^{x+y} (x + y + z) dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{2x}^{x+1} \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{x+y} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{2x}^{x+1} \frac{3}{2} (x+y)^2 dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (x+y)^3 \right]_{2x}^{x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (-19x^3 + 12x^2 + 6x + 1) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{19}{4} x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x \right]_0^1 = \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

(d) $\int_A x(y^2 + z^2) dx dy dz$, $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 \geq y^2 + z^2, x \geq 0\}$.

Si ha, integrando per fili paralleli all'asse x

$$\begin{aligned} \int_A x(y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_D \left(\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x(y^2 + z^2) dx \right) dy dz, = \\ &= \int_D (y^2 + z^2) \left(\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x dz \right) dy dz, = \int_D (y^2 + z^2) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_D (y^2 + z^2)(1 - 2y^2 - 2z^2) dy dz \end{aligned}$$

con $D = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq 1/2\}$.

Passando a coordinate polari nel piano y, z si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_D (y^2 + z^2)(1 - 2y^2 - 2z^2) dy dz &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} (\rho^3 - 2\rho^5) d\theta \right) d\rho = \\ &= \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} (\rho^3 - 2\rho^5) d\rho = \pi \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

Alternativamente, per calcolare l'integrale proposto, si possono usare le coordinate cilindriche,

$$\begin{cases} x = t \\ y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

che trasformano l'insieme A' dello spazio (t, ρ, θ) , definito da

$$A' = \{(t, \rho, \theta) : \rho \leq t \leq \sqrt{1 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 1/\sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

nell'insieme A dello spazio (x, y, z) .

Utilizzando la formula del cambiamento di variabili e ricordando che

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, \rho, \theta)} = \rho,$$

si trova

$$\int_A x(y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}} t\rho^3 dt \right) d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{48},$$

con calcoli identici ai precedenti.

2. Calcolare il baricentro e il volume dei seguenti solidi omogenei:

(a) $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, (z - 1)^2 \geq x^2 + y^2\}$.

Sia

$$A = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, (z - 1)^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

Integrando per strati paralleli al piano x, y si ottiene

$$V(A) = \int_A dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} dx dy \right) dz,$$

essendo A_z il cerchio, sul piano $z = 0$, con centro nell'origine e raggio $z - 1$.

Poichè

$$\int_{A_z} dx dy = \pi(z - 1)^2$$

si ha

$$V(A) = \pi \int_0^1 (z - 1)^2 dz = \pi \left[\frac{(z - 1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Siano $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{z}_A$ le coordinate del baricentro di A .

Per simmetria si ha

$$\bar{x}_A = 0, \quad \bar{y}_A = 0,$$

mentre, essendo il solido omogeneo,

$$\bar{z}_A = \frac{1}{V(A)} \int_A z \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{\pi} \int_0^1 \left(\int_{A_z} z \, dx \, dy \right) dz = 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z) \, dz = 3 \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

- (b) piramide di vertici $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $D = (0, 0, 0)$.

Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

la piramide di vertici $ABCD$.

Integrando per strati paralleli al piano x, y si ottiene

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_{\Omega_z} dx \, dy \right) dz,$$

essendo Ω_z il triangolo, sul piano $z = 0$, descritto dalle disequazioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 - z \\ 0 \leq y \leq -x + 1 - z. \end{cases}$$

Poichè

$$\int_{\Omega_z} dx \, dy = \frac{1}{2}(1 - z)^2$$

si ha

$$V(\Omega) = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z)^2 \, dz = \left[-\frac{1}{6}(1 - z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Siano $\bar{x}_{\Omega}, \bar{y}_{\Omega}, \bar{z}_{\Omega}$ le coordinate del baricentro di Ω .

Per simmetria risulta

$$\bar{x}_{\Omega} = \bar{y}_{\Omega} = \bar{z}_{\Omega}$$

ed essendo il solido omogeneo si ha

$$\bar{z}_{\Omega} = \frac{1}{V(\Omega)} \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = 6 \int_0^1 \left(\int_{\Omega_z} z \, dx \, dy \right) dz = 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z) \, dz = 3 \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

- (c) solido del primo ottante limitato dalla superficie cilindrica di equazione $z = x^2/3$ e dai piani di equazione $z = 0, y = 0, 2x + 3y - 18 = 0$.

Sia C l'insieme del primo ottante limitato da $z = x^2/3, z = 0, y = 0, 2x + 3y - 18 = 0$.

Si ha, integrando per fili paralleli rispetto all'asse z

$$V(C) = \int_C dx \, dy \, dz = \int_D \left(\int_0^{x^2/3} dz \right) dx \, dy,$$

con $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq \frac{18-2x}{3}\}$ e applicando su D la formula di integrazione per verticali, si può scrivere:

$$\begin{aligned} V(C) &= \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \left(\int_0^{x^2/3} dz \right) dy \right) dx = \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \frac{x^2}{3} dy \right) dx = \\ &= \int_0^9 (2x^2 - \frac{2}{9}x^3) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{18} \right]_0^9 = \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

Siano $\bar{x}_C, \bar{y}_C, \bar{z}_C$ le coordinate del baricentro di C .

Poichè il solido è omogeneo si ha

$$\begin{aligned} \bar{x}_C &= \frac{1}{V(C)} \int_C x \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{243} \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \left(\int_0^{x^2/3} x \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \frac{2}{243} \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \frac{x^3}{3} dy \right) dx = \frac{2}{243} \int_0^9 (2x^3 - \frac{2}{9}x^4) dx = \frac{2}{243} \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{45}x^5 \right]_0^9 = \frac{27}{5}. \end{aligned}$$

Con calcoli analoghi si prova che

$$\bar{y}_C = \frac{1}{V(C)} \int_C y \, dx \, dy \, dz = \frac{6}{5} \quad \text{e} \quad \bar{z}_C = \frac{1}{V(C)} \int_C z \, dx \, dy \, dz = \frac{27}{5}.$$

3. Sia A il solido generato dalla rotazione attorno all'asse z della regione piana:

$$C = \{(x, y, z) : y = 0, x^2 - 1 \leq z \leq (x - 1)^2, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Determinare il volume e il baricentro di A .

Applicando il I^0 Teorema di Guldino risulta

$$V(A) = 2\pi \int_C x \, dx \, dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{(x-1)^2} x \, dz \right) dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^2) \, dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$

Siano $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{z}_A$ le coordinate del baricentro di A .

Per simmetria si ha

$$\bar{x}_A = 0, \quad \bar{y}_A = 0,$$

mentre, essendo il solido omogeneo, si ha, integrando per strati paralleli al piano x, y

$$\bar{z}_A = \frac{1}{V(A)} \int_A z \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2\pi} \int_{-1}^0 \left(\int_{A_{1,z}} z \, dx \, dy \right) dz + \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{A_{2,z}} z \, dx \, dy \right) dz$$

dove $A_{1,z}$ è il cerchio, sul piano $z = 0$, con centro nell'origine e raggio $\sqrt{z+1}$ e $A_{2,z}$ è il cerchio, sul piano $z = 0$, con centro nell'origine e raggio $1 - \sqrt{z}$.

Poichè

$$\int_{A_{1,z}} dx \, dy = \pi(z+1) \quad \text{e} \quad \int_{A_{2,z}} dx \, dy = \pi(1-\sqrt{z})^2$$

si ottiene

$$\bar{z}_A = \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^0 (z^2 + z) \, dz + \int_0^1 (z^2 - 2z\sqrt{z} + z) \, dz \right) = \frac{3}{2} \left(\left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{z^3}{3} - \frac{4}{5}z^2\sqrt{z} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 \right) = -\frac{1}{5}.$$

4. Dato il solido $C_r = \{x^2 + y^2 \geq r^2, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ determinare il valore del parametro r in modo che il volume di C sia $\pi/8$.

Integrando per strati paralleli al piano x, y si ha

$$V(C_r) = \int_{C_r} dx \, dy \, dz = \int_{r^2}^1 \left(\int_{C_{r,z}} dx \, dy \right) dz \quad (0 < r < 1)$$

dove $C_{r,z}$ è la corona circolare, sul piano $z = 0$, descritta dalle disequazioni $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq z$.

Poichè

$$\int_{C_r} dx \, dy = \pi(z - r^2),$$

risulta

$$V(C_r) = \pi \int_{r^2}^1 (z - r^2) \, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - r^2 z \right]_{r^2}^1 = \frac{\pi}{2} (1 - r^2)^2.$$

Imponendo che $V(C_r)$ sia uguale a $\pi/8$, si ottiene $r = 1/\sqrt{2}$.

5. Determinare il volume dei seguenti solidi di rotazione:

(a) T triangolo di vertici $(0, 0, 2)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, 1, 1)$ attorno all'asse y .

Sia

$$T = \{(y, z) : z - 2 \leq y \leq 2 - z, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Applicando il I^0 Teorema di Guldino si ottiene

$$V = 2\pi \int_T z \, dy \, dz = 2\pi \int_1^2 \left(\int_{z-2}^{2-z} z \, dy \right) dz = 4\pi \int_1^2 (2z - z^2) \, dz = 4\pi \left[z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

- (b) $D = \{(x, y, z) : y = 0, x^2 - 4z^2 \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse z .

Applicando il I^0 Teorema di Guldino si ottiene

$$V = 2\pi \int_D x \, dx \, dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-x/2}^{x/2} x \, dz \right) dx = 2\pi \int_0^1 x^2 \, dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

- (c) $D = \{(x, y, z) : z = 0, 0 \leq y \leq |-1/4 + x^2|, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse x .

Posto $D = D_1 \cup D_2$ dove

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq -x^2 + 1/4\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 - 1/4\},$$

e applicando il I^0 Teorema di Guldino risulta

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_D y \, dx \, dy = 2\pi \left(\int_{D_1} y \, dx \, dy + \int_{D_2} y \, dx \, dy \right) = \\ &= 2\pi \left(\int_0^{1/2} \left(\int_0^{-x^2+1/4} y \, dy \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{x^2-1/4} y \, dy \right) dx \right) = \\ &= \pi \left(\int_0^{1/2} \left(-x^2 + \frac{1}{4} \right)^2 dx + \int_{1/2}^1 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right)^2 dx \right) = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{16} \right]_0^1 = \frac{23}{240} \pi. \end{aligned}$$