

# Le funzioni a due variabili

## Versione 3

Roberto Boggiani

25 luglio 2003

## 1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Nello studio delle funzioni Reali ad una variabile Reale abbiamo sempre fatto riferimento all'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali. Dovendo ora trattare il caso di Funzioni Reali a più variabili Reali dobbiamo considerare il concetto di spazio  $\mathbb{R}^n$ . Non vogliamo entrare nella teoria dei vettori e degli spazi vettoriali, ma solamente definire alcuni concetti che saranno fondamentali per la trattazione della teoria delle funzioni reali a due o più variabili reali. Supposto allora conosciuto l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali diamo la seguente:

**Definizione 1.1 (di vettore di  $\mathbb{R}^n$ )** Prende il nome di vettore di  $\mathbb{R}^n$  una qualunque  $n$ -pla di numeri Reali. In simboli un vettore di  $\mathbb{R}^n$  sarà dato da:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

**Definizione 1.2 (di spazio ad  $n$ -dimensioni)** Prende il nome di spazio ad  $n$  dimensioni, l'insieme di tutte le  $n$ -ple di numeri reali che lo compongono. In simboli lo spazio ad  $n$ -dimensioni verrà indicato con  $\mathbb{R}^n$ .

Notiamo le seguenti particolarità:

- se  $n = 1$  si ottiene  $\mathbb{R}$  ossia lo spazio ad una dimensione. Ciascun vettore di tale spazio sarà dato da un numero reale:  $x \in \mathbb{R}$ .
- se  $n = 2$  si ottiene  $\mathbb{R}^2$  ossia lo spazio a due dimensioni. Ciascun vettore di tale spazio sarà dato da una coppia di numeri reali:  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . In questo caso si usa anche la notazione alternativa:  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- se  $n = 3$  si ottiene  $\mathbb{R}^3$  ossia lo spazio a tre dimensioni. Ciascun vettore di tale spazio sarà dato da una terna di numeri reali:  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . In questo caso si usa anche la notazione alternativa:  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Dalla geometria analitica nel piano sappiamo che:

- esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali  $x$  e i punti della retta per cui l'insieme  $\mathbb{R}$  rappresenta geometricamente una retta.
- esiste una corrispondenza biunivoca tra le coppie di numeri reali  $(x, y)$  e i punti del piano per cui l'insieme  $\mathbb{R}^2$  rappresenta geometricamente un piano.

## 2 Lo spazio a tre dimensioni

Come detto esiste una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali e punti del piano; è facile estendere questa considerazione allo spazio e stabilire una corrispondenza biunivoca tra terne di numeri reali e punti dello spazio. Consideriamo infatti tre rette orientate che chiameremo asse delle  $x$ , delle  $y$  e delle  $z$  rispettivamente, ovvero *assi* del sistema di riferimento cartesiano, che siano a due a due ortogonali tra loro e passino per uno stesso punto  $O$ , che chiameremo *origine* così come evidenziato nella figura 1. Proiettiamo ortogonalmente un punto  $P$  dello spazio sulle tre rette orientate così come evidenziato nella figura 2; a  $P$  si associano le coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$  delle proiezioni. Viceversa, assegnati tre numeri reali  $x$ ,  $y$  e  $z$  considerati sul primo, sul secondo e sul terzo asse il punto che ha come coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispettivamente, prendiamo per ciascuno di essi il piano ortogonale all'asse su cui giace; l'intersezione

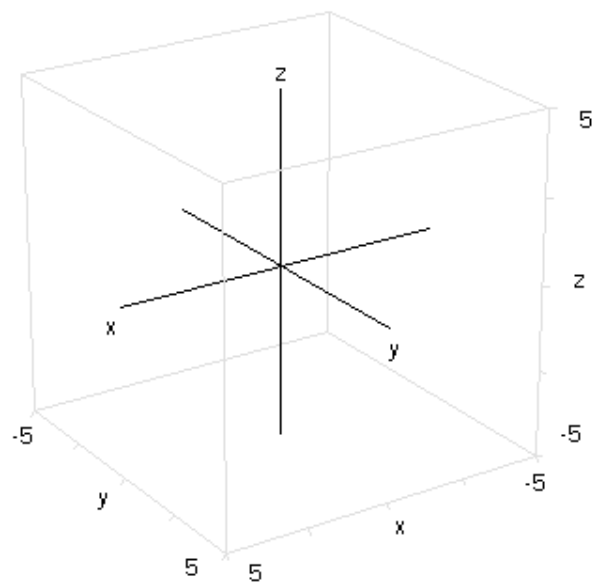
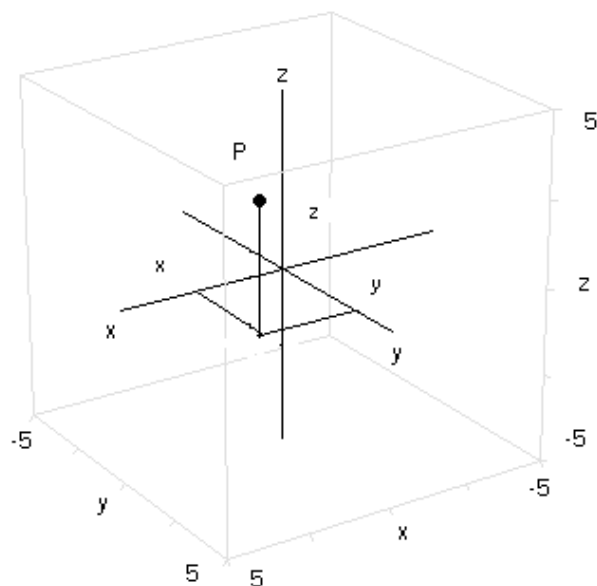


Figura 1: Sistema di riferimento cartesiano

Figura 2: Proiezioni ortogonali di un punto  $P$

dei tre piani è il punto dello spazio che si associa ai tre numeri dati. Grazie a questa corrispondenza biunivoca potremmo scrivere che:

$$P(x, y, z)$$

In particolare l'origine  $O$  ha come coordinate:

$$O(0, 0, 0)$$

Diremo *spazio cartesiano* o semplicemente *spazio* e lo indicheremo con  $\mathbb{R}^3$  l'insieme delle terne ordinate  $(x, y, z)$  di numeri reali, che chiameremo *punti* di  $\mathbb{R}^3$ . Per lo spazio cartesiano si possono ripetere molti dei concetti visti per il piano cartesiano ed affiancarne altri di nuovi come vedremo successivamente.

### 3 Distanza tra due punti nello spazio

Fissati nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali, consideriamo i due punti  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$  ed indichiamo con  $d(A; B)$  la loro distanza. Si può dimostrare, anche semplicemente che:

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

In particolare la distanza del punto  $A = (x, y, z)$  dal punto  $O(0, 0, 0)$ , ossia la distanza di qualsiasi punto dello spazio dall'origine del sistema di riferimento cartesiano è:

$$d(A; O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 4 I piani fondamentali

Si consideri il sistema di riferimento cartesiano evidenziato nella figura 1. Dall'analisi di tale sistema di riferimento siamo in grado di ricavare i seguenti piani che chiameremo fondamentali:

- il piano  $xy$  è il luogo dei punti dello spazio per cui è nulla la terza coordinata ossia tutti i punti che si trovano in questo piano avranno coordinate  $(x, y, 0)$  ed inoltre questo piano è perpendicolare all'asse delle  $z$  ed avrà equazione

$$z = 0$$

- il piano  $xz$  è il luogo dei punti dello spazio per cui è nulla la seconda coordinata ossia tutti i punti che si trovano in questo piano avranno coordinate  $(x, 0, z)$  ed inoltre questo piano è perpendicolare all'asse delle  $y$  ed avrà equazione

$$y = 0$$

- il piano  $yz$  è il luogo dei punti dello spazio per cui è nulla la prima coordinata ossia tutti i punti che si trovano in questo piano avranno coordinate  $(0, y, z)$  ed inoltre questo piano è perpendicolare all'asse delle  $x$  ed avrà equazione

$$x = 0$$

Dalle equazioni dei piani fondamentali possiamo ottenere le equazioni dei piani ad essi paralleli che saranno date da: che:

- il piano  $z = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  è un piano parallelo al piano  $xy$
- il piano  $y = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  è un piano parallelo al piano  $xz$
- il piano  $x = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  è un piano parallelo al piano  $yz$

### 5 Equazioni degli assi

Da quanto detto siamo in grado di ricavare anche le equazioni degli assi di un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Si avrà infatti che:

- l'asse delle  $z$  è il luogo dei punti dello spazio per cui sono contemporaneamente nulle  $x$  ed  $y$  ossia i punti che si trovano sull'asse delle  $z$  avranno coordinate  $(0, 0, k)$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Notando inoltre che l'asse delle  $z$  si può ottenere come intersezione dell'asse  $xz$  con il piano  $yz$  si arriva a concludere che l'equazione di tale asse è data da:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- l'asse delle  $y$  è il luogo dei punti dello spazio per cui sono contemporaneamente nulle  $x$  ed  $z$  ossia i punti che si trovano sull'asse delle  $y$  avranno coordinate  $(0, k, 0)$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Notando inoltre che l'asse delle  $y$  si può ottenere come intersezione dell'asse  $xy$  con il piano  $yz$  si arriva a concludere che l'equazione di tale asse è data da:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- l'asse delle  $x$  è il luogo dei punti dello spazio per cui sono contemporaneamente nulle  $y$  ed  $z$  ossia i punti che si trovano sull'asse delle  $x$  avranno coordinate  $(k, 0, 0)$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Notando inoltre che l'asse delle  $x$  si può ottenere come intersezione dell'asse  $xz$  con il piano  $yx$  si arriva a concludere che l'equazione di tale asse è data da:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ripetendo un ragionamento analogo a quello fatto in precedenza, possiamo ottenere le equazioni delle rette ad essi paralleli che saranno date da:

- l'equazione della retta parallela all'asse  $z$  e passante per il punto  $(k_1, k_2, 0)$  è

$$\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \end{cases}$$

- l'equazione della retta parallela all'asse delle  $y$  e passante per il punto  $(k_1, 0, k_2)$  è

$$\begin{cases} x = k_1 \\ z = k_2 \end{cases}$$

- l'equazione della retta parallela all'asse delle  $x$  e passante per il punto  $(0, k_1, k_2)$  è

$$\begin{cases} y = k_1 \\ z = k_2 \end{cases}$$

## 6 Equazione generale del piano

Sappiamo che nel piano cartesiano una retta è rappresentata da un'equazione lineare nelle variabili  $x$  ed  $y$  e che viceversa ogni equazione lineare che non perda di significato nelle variabili  $x$  ed  $y$  rappresenta una retta. Se spostiamo la nostra attenzione sullo spazio cartesiano valgono i seguenti due teoremi:

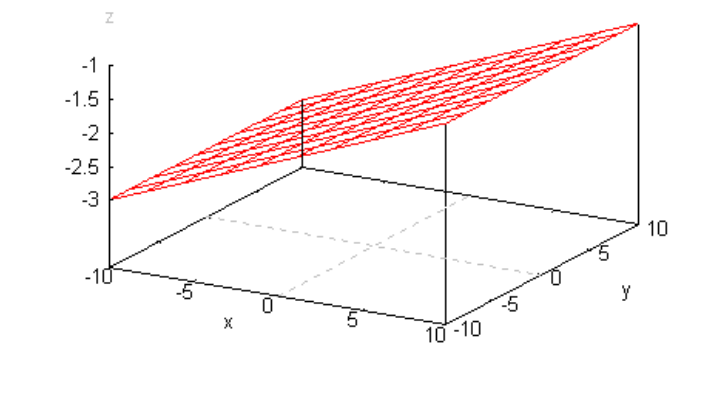
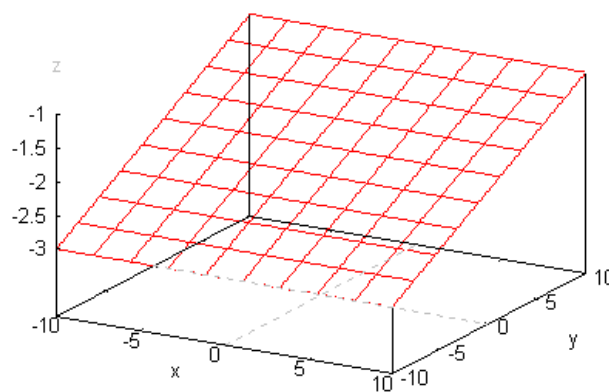
**Teorema 6.1** *Un piano è rappresentato da un'equazione lineare nelle variabili  $x, y$  e  $z$*

**Teorema 6.2** *Ogni equazione lineare  $ax + by + cz + d = 0$  nelle variabili  $x, y$  e  $z$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a, b, c$  non contemporaneamente nulli, rappresenta un piano.*

## 7 Piani in posizione particolare rispetto agli assi

Data una equazione lineare  $ax + by + cz + d = 0$  nelle variabili  $x, y$  e  $z$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a, b, c$  non contemporaneamente nulli da quanto detto nel paragrafo precedente sappiamo che tale equazione rappresenta un piano. Si possono però presentare i seguenti casi particolari:

- $c = 0$  quindi l'equazione diviene  $ax + by + d = 0$  che rappresenta un piano parallelo all'asse  $z$ . In particolare se anche  $d = 0$  l'equazione diviene  $ax + by = 0$  che rappresenta un piano che contiene l'asse  $z$

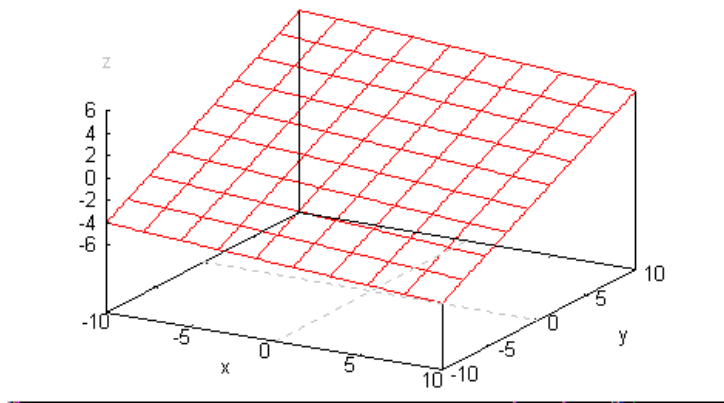
Figura 3: Piano di equazione  $0.1x - z - 2 = 0$ Figura 4: Piano di equazione  $0.1y - z - 2 = 0$ 

- $b = 0$  quindi l'equazione diviene  $ax + cz + d = 0$  che rappresenta un piano parallelo all'asse  $y$ . In particolare se anche  $d = 0$  l'equazione diviene  $ax + cz = 0$  che rappresenta un piano che contiene l'asse  $y$ . A tal riguardo si noti la figura 3
- $a = 0$  quindi l'equazione diviene  $by + cz + d = 0$  che rappresenta un piano parallelo all'asse  $x$ . In particolare se anche  $d = 0$  l'equazione diviene  $by + cz = 0$  che rappresenta un piano che contiene l'asse  $x$ . A tal riguardo si noti la figura 4
- $d = 0$  quindi l'equazione diviene  $ax + by + cz = 0$  che rappresenta un piano passante per l'origine  $O$ . A tal riguardo si noti la figura 5

## 8 Equazione del piano passante fra tre punti non allineati

Dati tre punti non allineati  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  e  $C(x_3, y_3, z_3)$ , l'equazione del piano passante per questi tre punti ha per equazione:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 5: Piano di equazione  $0.1x - 0.5y + z = 0$ 

## 9 Equazione del piano passante per un punto e parallelo a un piano dato

Dato un punto  $A(x_1, y_1, z_1)$  ed un piano  $ax + by + cz + d = 0$  il piano passante per tale punto e parallelo al piano dato avrà per equazione:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

## 10 Condizione di parallelismo tra piani

Dati due piani:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

condizione necessaria e sufficiente affinché i due piani siano paralleli è che:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$$

se oltre ciò accade anche che:

$$k = \frac{d_1}{d_2}$$

allora siamo in presenza di due piani paralleli e sovrapposti ossia coincidenti.

## 11 Condizione di perpendicolarità tra piani

Dati due piani:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

condizione necessaria e sufficiente affinché i due piani siano perpendicolari è che:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

## 12 Definizione di Funzione Reale a due variabili Reali

In concetto di funzione reale a due variabili reali si estende facilmente dal concetto di funzione reale ad una variabile reale. Diamo la seguente:

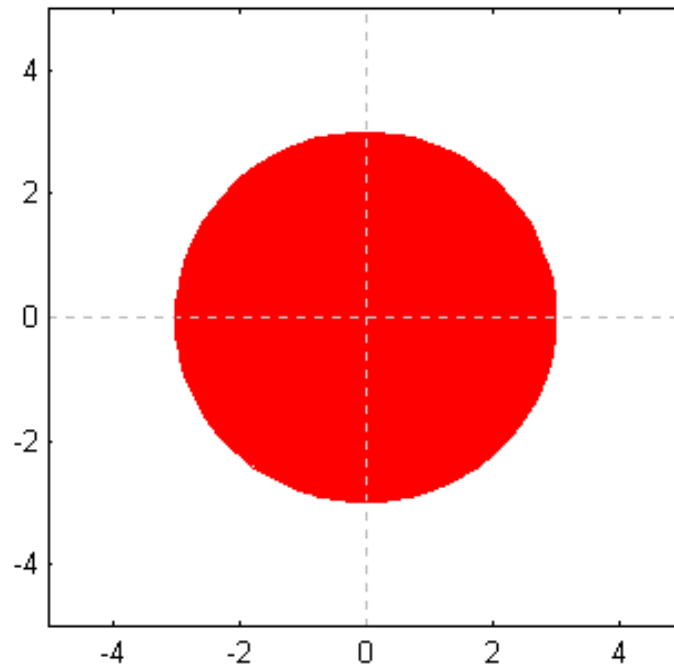


Figura 6: Dominio della funzione  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

**Definizione 12.1 (di funzione reale a due variabili reali)** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Prende il nome di *funzione reale a due variabili reali* una corrispondenza che ad ogni coppia  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  associa un ben determinato numero reale  $z \in \mathbb{R}$ . In simboli:

$$f : \begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow z = f(x, y) \end{cases}$$

Come per le funzioni reali di variabile reale si varrà:

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$  prende il nome di dominio della funzione
- $\mathbb{R}$  prende il nome di codominio della funzione

D'ora in poi con il termine funzione a due variabili faremo sempre riferimento ad una funzione reale a due variabili reali.

## 13 Dominio di una funzione a due variabili

Per definire una funzione a due variabili bisogna che il dominio della stessa sia esplicitato in modo da poter definire in modo esatto la funzione stessa. Accade assai di frequente però che venga assegnata una formula matematica  $z = f(x, y)$  senza precisare quale sia il suo dominio. In questo caso possiamo considerare come dominio della funzione  $z = f(x, y)$  il più ampio sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  costituito da tutti e soli i valori di  $(x, y)$  per cui esistono finiti i corrispondenti valori di  $z$ . Questi numeri reali, univocamente determinati al variare di  $(x, y)$  si calcolano applicando la formula matematica  $z = f(x, y)$  che definisce la funzione considerata.

Trovare il dominio della funzione a due variabili  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Essendoci nella formula una radice quadrata, il calcolo potrà essere effettuato solamente per quelle coppie di numeri reali per cui:

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

ossia

$$x^2 + y^2 - 9 \leq 0$$

ricordando quanto appreso nello studio delle disequazioni a due variabili si avrà che il dominio della funzione considerata è quello che si evince dalla figura 6.

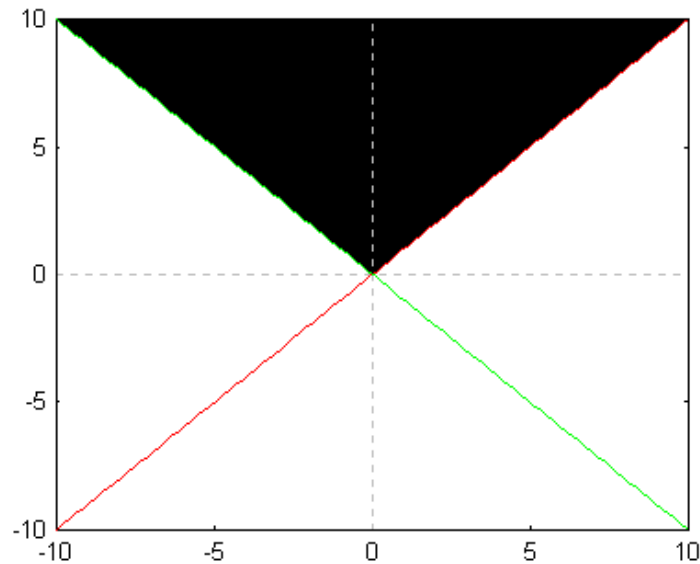


Figura 7: Dominio della funzione  $f(x, y) = \sqrt{y+x} + \sqrt{y-x}$

Trovare il dominio della funzione a due variabili  $f(x, y) = \sqrt{y+x} + \sqrt{y-x}$ . Essendoci nella formula due radici quadrate, il calcolo potrà essere effettuato solamente per quelle coppie di numeri reali per cui:

$$\begin{cases} y+x \geq 0 \\ y-x \geq 0 \end{cases}$$

ricordando quanto appreso nello studio delle disequazioni a due variabili si avrà che il dominio della funzione considerata è quello che si evince dalla figura 7.

## 14 I grafici delle funzioni a due variabili e le curve di livello

Essendo il dominio delle funzioni a due variabili un sottoinsieme del piano  $\mathbb{R}^2$  il grafico di tali funzioni sarà dato da una superficie nello spazio. Ad esempio il grafico della funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$  è quello evidenziato nella figura 8. La rappresentazione grafica delle funzioni a due variabili è quindi abbastanza complicata e può essere effettuata solamente con l'uso degli strumenti informatici, perciò per uno studio di tali funzioni si preferisce fare riferimento alle curve di livello. Diamo la seguente:

**Definizione 14.1 (di curva di livello)** Sia data una funzione a due variabili  $z = f(x, y)$  e un piano  $z = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  parallelo al piano  $xy$ . Prende il nome di curva di livello di quota  $k$  l'intersezione della funzione  $z = f(x, y)$  con il piano  $z = k$ .

Per trovare le curve di livello di una funzione a due variabili dobbiamo considerare il sistema:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = k \end{cases}$$

dal quale si ottiene

$$f(x, y) = k$$

e quindi al variare di  $k \in \mathbb{R}$  possiamo ottenere infinite curve di livello che ci forniscono una buona descrizione della funzione considerata.

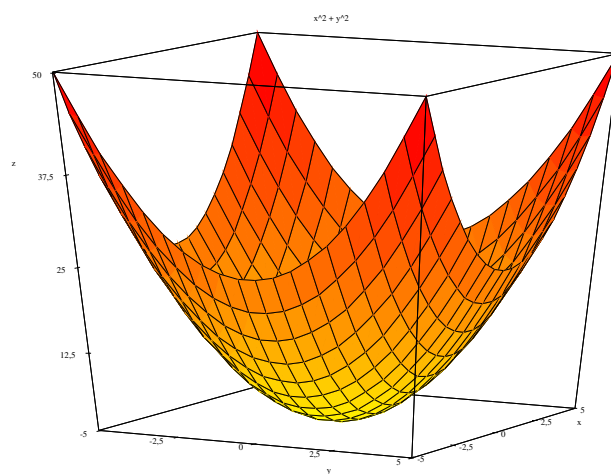
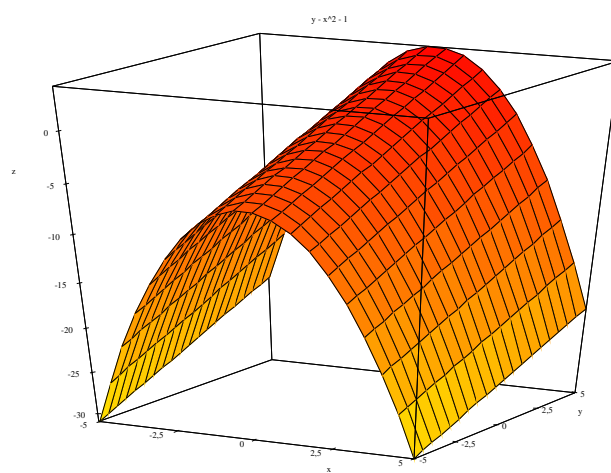
Consideriamo il seguente esempio consistente nel trovare le curve di livello per  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , della funzione  $f(x, y) = y - x^2 - 1$ . Il grafico di tale funzione è evidenziato nella figura 9 Costruiamo il sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = y - x^2 - 1 \\ z = k \end{cases}$$

dal quale otteniamo l'equazione in due variabili:

$$y - x^2 - 1 = k$$



Figura 8: Grafico della funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$ Figura 9: Grafico della funzione  $f(x, y) = y - x^2 - 1$

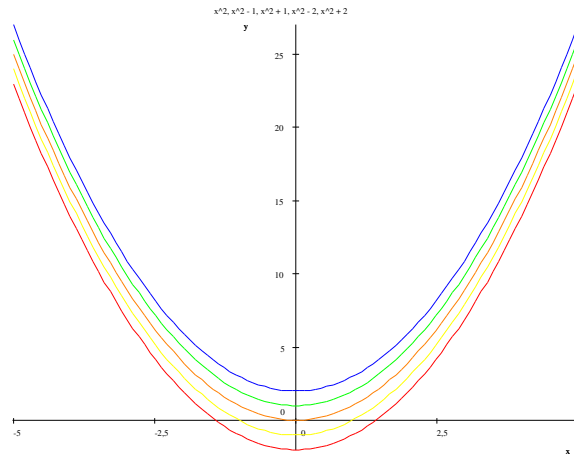


Figura 10: Curve di livello di  $f(x, y) = y - x^2 - 1$

equivalente a:

$$y = x^2 + 1 + k$$

Per la costruzione delle curve di livello dobbiamo allora attribuire a  $k$  i valori 1, 2, 3, 4, 5 ottenendo 5 parabole. Il grafico di tali parabole e quindi delle corrispondenti curve di livello è quello evidenziato nella figura 10

## 15 Elementi di topologia di $\mathbb{R}^2$

Diamo ora alcuni elementi di topologia su  $\mathbb{R}^2$  necessari per poter affrontare i concetti relativi ai successivi paragrafi. Diamo le seguenti:

**Definizione 15.1 (di intorno circolare)** Dato un punto  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  si definisce intorno circolare di centro  $P_0(x_0, y_0)$  e di raggio  $r$  l'insieme dei punti  $P(x, y)$  del piano tali che

$$d(P_0, P) < r$$

Si può facilmente notare che

$$d(P_0, P) < r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

**Definizione 15.2 (di intorno dell'infinito)** Dato un punto  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  si definisce intorno dell'infinito l'insieme dei punti  $P(x, y)$  del piano tali che

$$d(P_0, P) < \infty$$

**Definizione 15.3 (insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$ )** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , tale insieme si dice limitato se esiste un intorno circolare che lo contiene

**Definizione 15.4 (di punto di accumulazione di  $\mathbb{R}^2$ )** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ed un punto  $P_0(x_0, y_0)$  appartenente o no ad  $A$ , tale punto è detto di accumulazione per  $A$  se in ogni suo intorno circolare cade almeno un elemento di  $A$  distinto da  $P_0$ .

**Definizione 15.5 (di punto interno)** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ed un punto  $P_0(x_0, y_0)$ , tale punto è detto interno all'insieme  $A$  se esiste un intorno circolare di centro  $P_0(x_0, y_0)$  formato solo da punti dell'insieme  $A$ .

**Definizione 15.6 (di punto esterno)** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ed un punto  $P_0(x_0, y_0)$ , tale punto è detto esterno all'insieme  $A$  se esiste un intorno circolare di centro  $P_0(x_0, y_0)$  formato solo da punti appartenenti all'insieme complementare di  $A$  rispetto ad  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 15.7 (di punto di frontiera)** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ed un punto  $P_0(x_0, y_0)$ , tale punto è detto di frontiera per  $A$  se in ogni intorno circolare di centro  $P_0(x_0, y_0)$  si trovano sia punti appartenenti ad  $A$  che punti appartenenti al complementare di  $A$ .

**Definizione 15.8 (di insieme aperto di  $\mathbb{R}^2$ )** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , tale insieme si dice aperto se i suoi punti sono tutti interni

**Definizione 15.9 (di insieme chiuso di  $\mathbb{R}^2$ )** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , tale insieme si dice chiuso se contiene tutti i punti della sua frontiera

## 16 Limiti delle funzioni di due variabili

Possiamo estendere il concetto di limite delle funzioni ad una variabile anche alle funzioni a due variabili. Senza ripetere tutta la casistica studiata precedentemente ci limiteremo ad enunciare la definizione di limite in due casi utili nelle applicazioni successive.

**Definizione 16.1 (di limite finito)** Si dice che la funzione  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  tende al limite finito  $l$  per  $(x, y)$  che tende ad  $(x_0, y_0)$  e si scrive:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

se  $\forall \epsilon > 0$  esiste un intorno circolare di  $(x_0, y_0)$  tale che  $\forall (x, y)$  appartenenti a tale intorno circolare ad eccezione al più di  $(x_0, y_0)$  si verifica che:

$$|f(x, y) - l| < \epsilon$$

**Definizione 16.2 (di limite infinito)** Si dice che la funzione  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  tende al limite infinito  $+\infty$  per  $(x, y)$  che tende ad  $(x_0, y_0)$  e si scrive:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = +\infty$$

se  $\forall M > 0$  esiste un intorno circolare di  $(x_0, y_0)$  tale che  $\forall (x, y)$  appartenenti a tale intorno circolare ad eccezione al più di  $(x_0, y_0)$  si verifica che:

$$f(x, y) > M$$

Le definizioni negli altri casi di limite possono essere dedotte senza alcun problema da quelle viste nello studio dei limiti delle funzioni ad una variabile.

## 17 Continuità delle funzioni a due variabili

La definizione di continuità delle funzioni a due variabili è data dalla seguente:

**Definizione 17.1 (di continuità in un punto delle funzioni a due variabili)** Si dice che la funzione  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è continua nel punto  $(x_0, y_0)$  appartenente ad  $A$  se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

**Definizione 17.2 (di continuità in un insieme delle funzioni a due variabili)** Si dice che la funzione  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è continua in  $A$  se essa è continua in ogni punto appartenente ad  $A$ .

## 18 Derivate parziali prime delle funzioni a due variabili

Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  notiamo che:

- se assegniamo un valore alla variabile  $x$  supponiamo  $x = \bar{x}$  la funzione  $f(\bar{x}, y)$  diviene una funzione avente come variabile solamente  $y$
- se assegniamo un valore alla variabile  $y$  supponiamo  $y = \bar{y}$  la funzione  $f(x, \bar{y})$  diviene una funzione avente come variabile solamente  $x$

grazie a questo fatto possiamo allora dare le seguenti:

**Definizione 18.1 (di derivata parziale prima rispetto alla variabile  $x$ )** Sia  $f(x, y)$  una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $(x_0, y_0)$  un punto interno ad  $A$ , prende il nome di derivata parziale prima rispetto alla variabile  $x$  il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se tale limite esiste ed è finito. Se ciò accade si scriverà:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e si dirà che  $f(x, y)$  è derivabile rispetto alla variabile  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$

**Definizione 18.2 (di derivata parziale prima rispetto alla variabile  $y$ )** Sia  $f(x, y)$  una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $(x_0, y_0)$  un punto interno ad  $A$ , prende il nome di derivata parziale prima rispetto alla variabile  $y$  il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se tale limite esiste ed è finito. Se ciò accade si scriverà:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e si dirà che  $f(x, y)$  è derivabile rispetto alla variabile  $y$  nel punto  $(x_0, y_0)$

**Definizione 18.3 (di derivabilità in un punto)** Sia  $f(x, y)$  una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $(x_0, y_0)$  un punto interno ad  $A$  se  $f(x, y)$  è derivabile nel punto  $(x_0, y_0)$  sia rispetto alla variabile  $x$  che rispetto alla variabile  $y$  allora si dirà che  $f(x, y)$  è derivabile nel punto  $(x_0, y_0)$ .

**Definizione 18.4 (di derivabilità in un insieme)** Sia  $f(x, y)$  una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se  $f(x, y)$  è derivabile in ogni punto interno ad  $A$  si dice che  $f(x, y)$  è derivabile in  $A$ .

In pratica per calcolare la derivata parziale prima

- rispetto alla variabile  $x$  bisogna considerare che la funzione  $f(x, \bar{y})$  è funzione della variabile  $x$  mentre la variabile  $y$  deve essere considerata come una costante. Quindi si dovranno applicare tutte le regole viste per il calcolo delle derivate delle funzioni ad una variabile considerando la funzione  $f(x, \bar{y})$  come funzione della variabile  $x$  e considerando la variabile  $y$  costante.
- rispetto alla variabile  $y$  bisogna considerare che la funzione  $f(\bar{x}, y)$  è funzione della variabile  $y$  mentre la variabile  $x$  deve essere considerata come una costante. Quindi si dovranno applicare tutte le regole viste per il calcolo delle derivate delle funzioni ad una variabile considerando la funzione  $f(\bar{x}, y)$  come funzione della variabile  $y$  e considerando la variabile  $x$  costante.

## 19 Derivate parziali seconde delle funzioni a due variabili

Notiamo che le derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$$

sono in generale ancora funzione delle variabili  $x$  ed  $y$ . e può accadere che tali funzioni siano a loro volta ancora parzialmente derivabili. Si avranno allora le derivate parziali seconde di una funzione a due variabili che saranno ovviamente quattro:

- derivata parziale seconda della  $f(x, y)$  fatta rispetto ad  $x$  due volte che si indica con  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$
- derivata parziale seconda della  $f(x, y)$  fatta prima rispetto ad  $x$  e poi rispetto ad  $y$  che si indica con  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$

- derivata parziale seconda della  $f(x, y)$  fatta prima rispetto ad  $y$  e poi rispetto ad  $x$  che si indica con  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$
- derivata parziale seconda della  $f(x, y)$  fatta rispetto ad  $y$  due volte che si indica con  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$

Le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

prendono il nome di *derivate parziali seconde miste* per le quali vale il seguente:

**Teorema 19.1 (di Schwarz)** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un dominio  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se le due derivate seconde miste:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

*sono continue in ogni punto  $(x, y)$  interno al dominio  $A$  allora esse sono uguali.*

Per meglio esporre i teoremi che seguiranno è utile introdurre la seguente:

**Definizione 19.1 (di funzioni di classe  $C^0, C^1, C^2$ )** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un dominio  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si dirà che:*

- $f(x, y)$  è di classe  $C^0$  se in ogni punto interno ad  $A$ 
  - $f(x, y)$  è continua
- $f(x, y)$  è di classe  $C^1$  se in ogni punto interno ad  $A$ 
  - $f(x, y)$  è continua
  - $f'_x, f'_y$  sono continue
- $f(x, y)$  è di classe  $C^2$  se in ogni punto interno ad  $A$ 
  - $f(x, y)$  è continua
  - $f'_x, f'_y$  sono continue
  - $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$  sono continue

## 20 Continuità e derivabilità

Circa le relazioni tra continuità e derivabilità ricordiamo un importante teorema valevole solamente nel caso di funzioni ad una variabile:

**Teorema 20.1 (derivabilità e continuità delle funzioni ad una variabile)** *Data una funzione ad una variabile  $f(x)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$*

- *se  $f(x)$  è derivabile in un punto  $x_0$  interno ad  $A$  allora  $f(x)$  è anche continua in  $x_0$*
- *se  $f(x)$  è continua in un punto  $x_0$  interno ad  $A$  allora non necessariamente  $f(x)$  è anche derivabile in  $x_0$*

Vogliamo ora vedere come tale teorema viene modificato nel caso delle funzioni a due variabili, vale per esse il seguente:

**Teorema 20.2 (derivabilità e continuità delle funzioni a due variabili)** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

- *se  $f(x, y)$  è derivabile in un punto  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  rispetto alla variabile  $x$*
- *se  $f(x, y)$  è derivabile in un punto  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  rispetto alla variabile  $y$*

*non necessariamente  $f(x, y)$  è continua nel punto  $(x_0, y_0)$ .*

Il concetto di derivabilità parziale non ci assicura quindi la continuità di una funzione ed è per questo motivo che dobbiamo introdurre il concetto di differenziabilità.

## 21 Differenziabilità

Diamo la seguente:

**Definizione 21.1 (di differenziabilità)** Data una funzione ad una variabile  $f(x)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  tale funzione si dice differenziabile nel punto  $(x_0, y_0)$  se è parzialmente derivabile in  $(x_0, y_0)$  sia rispetto alla variabile  $x$  che rispetto alla variabile  $y$  e se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] - [f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

In tale ipotesi il valore

$$f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$$

prende il nome di differenziale totale primo della  $f(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .

Valgono allora i seguenti:

**Teorema 21.1 (differenziabilità e derivabilità)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se  $f(x, y)$  è differenziabile in un punto  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  essa è anche derivabile parzialmente sia rispetto alla variabile  $x$  che rispetto alla variabile  $y$  in tale punto

**Teorema 21.2 (differenziabilità e continuità)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se  $f(x, y)$  è differenziabile in un punto  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  allora  $f(x, y)$  è continua nel punto  $(x_0, y_0)$

**Teorema 21.3 (condizione sufficiente di differenziabilità)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se  $f(x, y)$  è di classe  $C^1$  allora essa è differenziabile in ogni punto interno ad  $A$ .

## 22 Interpretazione geometrica della differenziabilità

Diamo il seguente:

**Teorema 22.1 (del piano tangente)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se  $f(x, y)$  è differenziabile nel punto  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  esiste un piano tangente  $f(x, y)$  nel punto di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  e l'equazione di tale piano sarà:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)$$

Da tale teorema siamo in grado di trovare l'equazione del piano tangente alla funzione  $f(x, y)$ .

## 23 Massimi e minimi relativi di funzioni a due variabili

Diamo le seguenti:

**Definizione 23.1 (massimo relativo di una funzione a due variabili)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un punto  $(x_0, y_0) \in A$  è un punto di massimo relativo per  $f(x, y)$  se esiste un intorno di  $(x_0, y_0)$  tale che  $\forall (x, y)$  appartenente a tale intorno si verifica che  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ . Prende il nome di massimo relativo il numero reale  $f(x_0, y_0)$ .

**Definizione 23.2 (minimo relativo di una funzione a due variabili)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un punto  $(x_0, y_0) \in A$  è un punto di minimo relativo per  $f(x, y)$  se esiste un intorno di  $(x_0, y_0)$  tale che  $\forall (x, y)$  appartenente a tale intorno si verifica che  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ . Prende il nome di minimo relativo il numero reale  $f(x_0, y_0)$ .

## 24 Ricerca dei massimi e dei minimi relativi di funzioni a due variabili

Per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi di una funzione a due variabili dobbiamo fare riferimento al seguente:

**Teorema 24.1** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e di classe  $C^1$  se  $(x_0, y_0)$  è un punto interno ad  $A$  di massimo o di minimo relativo allora:*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

*I punti  $(x_0, y_0)$  in cui si verificano queste condizioni prendono il nome di punti critici.*

In analogia con quanto visto per le funzioni ad una variabile si noterà certamente che il teorema 24.1 fornisce solamente delle condizioni necessarie ma non sufficienti alla ricerca dei massimi e dei minimi relativi per le funzioni di due variabili. In altre parole potrebbero esistere dei punti  $(x_0, y_0)$  in cui

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

senza però che tali punti siano di massimo o di minimo relativo. Dobbiamo allora introdurre delle ulteriori condizioni che ci permettano di definire la natura del punto critico  $(x_0, y_0)$ . Per fare ciò dobbiamo prima di tutto dare la seguente:

**Definizione 24.1 (di matrice hessiana)** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  di classe  $C^2$  prende il nome di matrice hessiana la seguente matrice simmetrica:*

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Possiamo allora enunciare il seguente:

**Teorema 24.2 (della ricerca dei massimi e minimi)** *Se  $f(x, y)$  è una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  di classe  $C^2$  e se  $(x_0, y_0)$  è un punto interno ad  $A$  in cui*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

*allora se accade che:*

- $|H(x_0, y_0)| > 0 \wedge f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo
- $|H(x_0, y_0)| > 0 \wedge f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo
- $|H(x_0, y_0)| < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  non è né un punto di massimo né un punto di minimo relativo e prende il nome di punto di sella
- $|H(x_0, y_0)| = 0$  nulla può essere detto a priori su  $(x_0, y_0)$

Tale teorema può anche essere riformulato nella seguente forma alternativa che coinvolge l'uso degli autovalori studiati in algebra lineare. Si avrà:

**Teorema 24.3 (della ricerca dei massimi e minimi)** *Se  $f(x, y)$  è una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  di classe  $C^2$  e se  $(x_0, y_0)$  è un punto interno ad  $A$  in cui*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

*allora se accade che:*

- gli autovalori della matrice  $H(x_0, y_0)$  sono entrambi positivi allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo relativo
- gli autovalori della matrice  $H(x_0, y_0)$  sono entrambi negativi allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo relativo
- gli autovalori della matrice  $H(x_0, y_0)$  sono uno positivo e l'altro negativo allora  $(x_0, y_0)$  non è né un punto di massimo relativo né un punto di minimo relativo
- se almeno uno degli autovalori di  $H(x_0, y_0)$  è uguale a zero nulla può essere detto a priori sulla natura del punto  $(x_0, y_0)$

## 25 Massimi e minimi vincolati di funzioni a due variabili

In molte applicazioni sorge la necessità di calcolare i massimi e i minimi di funzioni a due variabili le cui variabili non sono indipendenti ma devono soddisfare alla condizione  $g(x, y) = 0$ . Si parla allora di ricerca di massimi e minimi vincolati per funzioni a due variabili. Per la ricerca di tali massimi e minimi vincolati abbiamo bisogno prima di tutto di introdurre la seguente:

**Definizione 25.1 (di funzione Lagrangiana)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e un'altra funzione detta funzione di vincolo  $g(x, y) = 0$  prende il nome di funzione Lagrangiana la seguente funzione a tre variabili:

$$L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

in cui  $\lambda \in \mathbb{R}$

Per la ricerca dei massimi e dei minimi vincolati di una funzione a due variabili dobbiamo fare riferimento al seguente:

**Teorema 25.1** Dat una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e di classe  $C^1$  e una funzione detta vincolo  $g(x, y) = 0$  sempre di classe  $C^1$ , se  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  è un punto interno ad  $A$  di massimo o di minimo relativo allora:

$$L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

$$L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

$$L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

in cui  $L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  è la funzione Lagrangiana. I punti  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  in cui si verificano queste condizioni prendono il nome di punti critici vincolati.

In analogia con quanto visto per le funzioni ad una variabile si noterà certamente che il teorema 25.1 fornisce solamente delle condizioni necessarie ma non sufficienti alla ricerca dei massimi e dei minimi vincolati per le funzioni di due variabili. Dobbiamo allora introdurre delle ulteriori condizioni che ci permettano di definire la natura del punto critico  $(x_0, y_0, \lambda_0)$ . Per fare ciò dobbiamo prima di tutto dare la seguente:

**Definizione 25.2 (di matrice hessiana orlata)** Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  di classe  $C^2$  e una funzione detta vincolo  $g(x, y) = 0$  sempre di classe  $C^2$ , prende il nome di matrice hessiana orlata la seguente matrice simmetrica:

$$\overline{H}(x, y) = \begin{bmatrix} L''_{\lambda\lambda}(x, y, \lambda) & L''_{\lambda x}(x, y, \lambda) & L''_{\lambda y}(x, y, \lambda) \\ L''_{x\lambda}(x, y, \lambda) & L''_{xx}(x, y, \lambda) & L''_{xy}(x, y, \lambda) \\ L''_{y\lambda}(x, y, \lambda) & L''_{yx}(x, y, \lambda) & L''_{yy}(x, y, \lambda) \end{bmatrix}$$

in cui  $L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  è la funzione Lagrangiana.

Possiamo allora enunciare il seguente:

**Teorema 25.2 (della ricerca dei massimi e minimi vincolati)** Se  $f(x, y)$  è una funzione a due variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  di classe  $C^2$  e  $g(x, y) = 0$  è la funzione vincolo sempre di classe  $C^2$ , e se  $(x_0, y_0)$  è un punto interno ad  $A$  in cui

$$L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

$$L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

$$L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

con  $L = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  funzione Lagrangiana, allora se accade che:

- $|\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0)| > 0$  allora  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  è un punto di massimo relativo vincolato
- $|\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0)| < 0$  allora  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  è un punto di minimo relativo vincolato
- $|\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0)| = 0$  nulla può essere detto a priori su  $(x_0, y_0, \lambda_0)$



## 26 Massimi e minimi assoluti di funzioni a due variabili

Diamo le seguenti:

**Definizione 26.1 (massimo assoluto di una funzione a due variabili)** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un punto  $(x_0, y_0) \in A$  è un punto di massimo assoluto per  $f(x, y)$  se  $\forall (x, y) \in A$  si verifica che  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ . Prende il nome di massimo assoluto il numero reale  $f(x_0, y_0)$ .*

**Definizione 26.2 (minimo assoluto di una funzione a due variabili)** *Data una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un punto  $(x_0, y_0) \in A$  è un punto di minimo assoluto per  $f(x, y)$  se  $\forall (x, y) \in A$  si verifica che  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ . Prende il nome di minimo assoluto il numero reale  $f(x_0, y_0)$ .*

Circa l'esistenza dei massimi e minimi assoluti per una funzione a due variabili vale il seguente:

**Teorema 26.1 (di Weierstrass)** *Una funzione a due variabili  $f(x, y)$  definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  chiuso e limitato è dotata di minimo e di massimo assoluto.*

## 27 Ricerca dei massimi e minimi assoluti in un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$

Volendo trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluti di una funzione  $f(x, y)$  definita in un insieme chiuso e limitato  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  notiamo prima di tutto che essendo applicabile il teorema di Weierstrass 26.1 tali valori sicuramente esisteranno. La loro ricerca dovrà allora essere effettuata:

- nei punti critici interni ad  $A$
- nei punti interni ad  $A$  in cui la funzione non è differenziabile
- nei punti critici vincolati appartenenti alla frontiera di  $A$

In pratica per trovare i punti di massimo e di minimo assoluti dovremmo procedere in questo modo:

- trovare i punti interni ad  $A$  in cui la funzione non è differenziabile
- trovare i punti critici interni ad  $A$  che soddisfano il teorema 24.1
- trovare i punti critici vincolati che si trovano sulla frontiera di  $A$  che soddisfano il teorema 25.1

Detti  $(x_i, y_i)$  con  $i = 1..n$  tali punti dovremmo calcolare i valori:

$$f(x_i, y_i)$$

$\forall i = 1..n$ . Si avrà allora che:

- il più grande valore di  $f(x_i, y_i)$  sarà il massimo assoluto mentre il punto che lo genera ossia  $(x_i, y_i)$  è il punto di massimo assoluto
- il più piccolo valore di  $f(x_i, y_i)$  sarà il minimo assoluto mentre il punto che lo genera ossia  $(x_i, y_i)$  è il punto di minimo assoluto

## 28 Estensione al caso di più variabili

Notiamo che molti dei concetti espressi nei precedenti paragrafi possono essere estesi senza difficoltà dal caso di una funzione  $f(x, y)$  a due variabili al caso di una funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ad  $n$  variabili. Vogliamo qui solamente riformulare il teorema che riguarda la ricerca dei massimi e dei minimi relativi per funzioni ad  $n$  variabili dato nel seguente:

**Teorema 28.1 (della ricerca dei massimi e minimi)** *Se  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è una funzione a  $n$  variabili definita in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  di classe  $C^2$  e se  $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$  è un punto interno ad  $A$  in cui*

$$f'_{x_1}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = 0$$

$$f'_{x_2}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = 0$$

$$\dots$$

$$f'_{x_n}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = 0$$

*allora se accade che:*

- $|H(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})| > 0$  per tutti i minori principali di Nord-Ovest allora  $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$  è un punto di minimo relativo
- $|H(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})| < 0$  per tutti i minori principali di Nord-Ovest di ordine dispari mentre  $|H(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})| > 0$  per tutti i minori principali di Nord-Ovest di ordine pari allora  $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$  è un punto di massimo relativo
- se non si verifica per nessun minore di Nord-Ovest che  $|H(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})| = 0$  ma non sono rispettate le ipotesi viste nei punti precedenti allora il punto  $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$  non è né di massimo né di minimo relativo
- se  $|H(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})| = 0$  per qualche minore principale di Nord-Ovest nulla può essere detto a priori su  $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$

Si noti che tale teorema poteva essere enunciato anche in termini di autovalori come fatto nel caso di funzioni a due variabili.

## Elenco delle figure

1	Sistema di riferimento cartesiano . . . . .	2
2	Proiezioni ortogonali di un punto $P$ . . . . .	2
3	Piano di equazione $0.1x - z - 2 = 0$ . . . . .	5
4	Piano di equazione $0.1y - z - 2 = 0$ . . . . .	5
5	Piano di equazione $0.1x - 0.5y + z = 0$ . . . . .	6
6	Dominio della funzione $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . . . . .	7
7	Dominio della funzione $f(x, y) = \sqrt{y + x} + \sqrt{y - x}$ . . . . .	8
8	Grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ . . . . .	9
9	Grafico della funzione $f(x, y) = y - x^2 - 1$ . . . . .	9
10	Curve di livello di $f(x, y) = y - x^2 - 1$ . . . . .	10

## Indice

1	Lo spazio $\mathbb{R}^n$	1
2	Lo spazio a tre dimensioni	1
3	Distanza tra due punti nello spazio	3
4	I piani fondamentali	3
5	Equazioni degli assi	3
6	Equazione generale del piano	4
7	Piani in posizione particolare rispetto agli assi	4
8	Equazione del piano passante fra tre punti non allineati	5
9	Equazione del piano passante per un punto e parallelo a un piano dato	6
10	Condizione di parallelismo tra piani	6
11	Condizione di perpendicolarità tra piani	6
12	Definizione di Funzione Reale a due variabili Reali	6
13	Dominio di una funzione a due variabili	7
14	I grafici delle funzioni a due variabili e le curve di livello	8
15	Elementi di topologia di $\mathbb{R}^2$	10
16	Limiti delle funzioni di due variabili	11
17	Continuità delle funzioni a due variabili	11
18	Derivate parziali prime delle funzioni a due variabili	11
19	Derivate parziali seconde delle funzioni a due variabili	12
20	Continuità e derivabilità	13
21	Differenziabilità	14
22	Interpretazione geometrica della differenziabilità	14
23	Massimi e minimi relativi di funzioni a due variabili	14
24	Ricerca dei massimi e dei minimi relativi di funzioni a due variabili	15
25	Massimi e minimi vincolati di funzioni a due variabili	16
26	Massimi e minimi assoluti di funzioni a due variabili	17
27	Ricerca dei massimi e minimi assoluti in un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$	17
28	Estensione al caso di più variabili	17
	Elenco delle figure	19