RISOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = 2y + x - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Trovo la soluzione dell'omogenea $y' = 2y$ che so essere $A\,e^{2t}$ ($y' = ky$ e la soluzione è $A\,e^{kt}$)

2. Adesso trovo la soluzione finale, che deve essere del tipo $A\,e^{2t} + y_f(x)$ con y_f una funzione (da trovare) che soddisfi $y' = 2y + x - 1$.
   Scelgo di rappresentare la mia funzione con $\alpha x + \beta$ e mi trovo $\alpha\, e\, \beta$

$\alpha = 2\,(\,\alpha x + \beta\,) + x - 1$ (perché $y = \alpha x + \beta$ e la sua derivata è $y' = \alpha$)

$(\,2\alpha + 1\,)\,x + 2\beta - 1 - \alpha = 0$ quindi $2\alpha + 1 = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

$2\beta = 1 + \alpha \rightarrow \beta = \frac{1}{4}$

Posso dire allora che $y_f(x) = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}$ è la soluzione e l'espressione generale dell'equazione di partenza è $y(t) = A\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}$.

Sapendo che $y(0) = 0$ mi posso trovare A $\rightarrow$ $A + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow A = -\frac{1}{4}$

Posso quindi affermare che $y(x) = -\frac{1}{4}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}$ è la **<u>soluzione del problema</u>** .

Infatti posso verificarlo così:

$y(0) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ e $y' = -\frac{1}{4}\,e^{2x} * 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}$

e sostituendo l'equazione della soluzione del problema con $y' = 2y + x - 1$ devo trovare lo stesso risultato trovato sopra :

$y' = 2y + x - 1 = 2 * [\,-\frac{1}{4}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,] + x - 1 =$

$= -\frac{1}{2}\,e^{2x} - x + \frac{1}{2} + x - 1 = -\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}$ che infatti risulta essere lo stesso