

Esame di ANALISI MATEMATICA III - 3 Maggio 2002

A

ESERCIZIO 1. Data la funzione reale di due variabili reali $f(x, y) = \frac{1}{x^2 y}$ si chiede di:

- (a) determinare il dominio D di f e rappresentarlo graficamente;

Soluzione

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \left(\{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = 0\} \right).$$

- (b) calcolare il gradiente di f nel generico punto $(x, y) \in D$:

Soluzione

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(-\frac{2}{x^3 y}, -\frac{1}{x^2 y^2} \right), \quad (x, y) \in D.$$

- (c) stabilire se f è differenziabile nel punto $(-1, -1)$ e calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(-1, -1)$ per $v = (1, 2)$.

Soluzione

Poichè f è derivabile parzialmente nel suo dominio D e le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{x^3 y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x^2 y^2}$$

sono continue in D , la funzione f è differenziabile in tutto D , in particolare f è differenziabile nel punto $(-1, -1) \in D$.

Siccome $f(x, y)$ è differenziabile in $(-1, -1)$ si può calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(-1, -1)$ facendo il prodotto scalare tra il gradiente di f in $(-1, -1)$ e il vettore $v = (1, 2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1, -1) = \nabla f(-1, -1) \cdot v = (-2, -1) \cdot (1, 2) = -4.$$

Alternativamente, utilizzando la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1, -1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-1+t, -1+2t) - f(-1, -1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3 - 5t^2 + 4t}{t(t-1)^2(2t-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 - 5t + 4}{(t-1)(2t-1)} = -4.$$

ESERCIZIO 2. Data la funzione reale di due variabili reali $f(x, y) = (y^2 - 4) \log(x + 4)$ si chiede di:

- (a) determinare il dominio D di f e rappresentarlo graficamente;

Soluzione

$$D = \{(x, y) : x > -4\}.$$

- (b) determinare i punti stazionari di f ;

Soluzione

Risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - 4}{x + 4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \log(x + 4), \quad (x, y) \in D.$$

I punti stazionari di f in D si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - 4}{x + 4} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \log(x + 4) = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzione in D i punti $(-3, -2)$ e $(-3, 2)$.

(c) Precisare la natura dei punti stazionari di f .

Soluzione

Per stabilire la natura dei punti stazionari $(-3, -2)$ e $(-3, 2)$ calcoliamo la matrice Hessiana della funzione f in tali punti.

Poichè risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y^2 - 4}{(x + 4)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2y}{x + 4} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \log(x + 4), \quad (x, y) \in D,$$

si ottiene

$$H_f(-3, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H_f(-3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\det H_f(-3, -2) = -16 < 0, \quad \text{e} \quad \det H_f(-3, 2) = -16 < 0$$

i punti $(-3, -2)$ e $(-3, 2)$ sono entrambi punti di sella.

ESERCIZIO 3. Dato l'integrale doppio

$$I = \int_D (2x + 1) dx dy \quad (1)$$

dove D è la regione del primo quadrante delimitata dalle curve di equazione $x = y^2$ e $y = x^3$, si imposti il calcolo dell'integrale I esplicitando D sia come dominio orizzontalmente convesso sia come dominio verticalmente convesso.

Soluzione

Integrando per orizzontali si ha

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq y^{1/3}\}$$

e

$$\int_D (2x + 1) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} (2x + 1) dx \right) dy.$$

Integrando per verticali si ha

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

e

$$\int_D (x + y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (2x + 1) dy \right) dx.$$

ESERCIZIO 4. Si calcoli

$$\int_D (x^2 + y^2) e^{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

con

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \leq -|x|\}.$$

Soluzione

Utilizzando coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

la regione D si trasforma nell'insieme

$$D' = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, \quad 5\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4\}.$$

Poichè il determinante Jacobiano della trasformazione è ρ , si ottiene

$$\begin{aligned} \int_D (x^2 + y^2) e^{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_{D'} \rho^3 e^{\rho^4} d\rho d\theta = \int_0^2 \left(\int_{5\pi/4}^{7\pi/4} \rho^3 e^{\rho^4} d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \rho^3 e^{\rho^4} d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{\rho^4}}{4} \right]_0^2 = \frac{\pi}{8} (e^{16} - 1). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5. Si calcoli il volume della regione E dello spazio x, y, z definita dalle seguenti disuguaglianze

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Soluzione

La regione E è l'intersezione fra il volume interno alla semisfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situata nel semispazio $z \geq 0$ e il volume esterno al cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Utilizzando coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases}$$

la regione E si trasforma nell'insieme

$$E' = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbf{R}^3 : \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \pi/4 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Poichè il determinante jacobiano della trasformazione è $\rho^2 \sin \phi$, risulta

$$\begin{aligned} \text{Volume}(E) &= \int_E dx dy dz = \int_{E'} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \phi d\theta \right) d\phi \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \sin \phi d\phi \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 [-\rho^2 \cos \phi]_{\pi/4}^{\pi/2} d\rho = \sqrt{2}\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

Si può anche calcolare il volume di E utilizzando il Teorema di Guldino.

Il solido E è infatti ottenuto ruotando attorno all'asse z la seguente regione del piano yz

$$A = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq y\}.$$

Quindi

$$\text{Vol}(E) = 2\pi \int_A y dy dz.$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

si ha

$$\text{Vol}(E) = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^2 \cos \theta d\theta \right) d\rho = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$