

Esercizi per casa - Undicesima settimana

Campi vettoriali

Esercizio 1

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (z e^{xz}, 1 + z^2 \cos y, x e^{xz} + 2z \sin y),$$

- (i) si verifichi, sulla base di risultati teorici, che esso ammette un potenziale scalare;
- (ii) si determini un potenziale scalare di \mathbf{v} .

Esercizio 2

Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy \right),$$

- i) dire se ammette un potenziale in tutto il dominio di definizione ed eventualmente calcolarlo;
- ii) calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(\pi t) + t^2, 1 + t^2)$.

Esercizio 3

Si calcoli l'integrale curvilineo (il lavoro) del campo vettoriale

$$v(x, y) = (\sin(y + x), \cos(x - y))$$

lungo la curva data dai lati del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, percorsi in senso antiorario.

Esercizio 4

Sia γ la curva chiusa in \mathbb{R}^3 formata dai tre segmenti che uniscono, nell'ordine, i punti

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (0, 3, 0), \quad P_3 = (0, 0, 4).$$

- (i) Calcolare

$$\int_{\gamma} z^2 ds.$$

(ii) Sia V il campo vettoriale definito da $V(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Calcolare

$$\oint_{\gamma} V \cdot d\gamma$$

e commentare il risultato.

Esercizio 5

Sia γ la curva piana definita da $\gamma(t) = (t \sin t, 2t)$ e sia $W(x, y) = (-y, x)$ un campo vettoriale piano.

- Calcolate il lavoro $L := \int_{P_0 P_1} W \cdot d\gamma$ del campo W lungo il tratto della curva γ congiungente $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (0, 2\pi)$.
- Calcolate il lavoro di W lungo il segmento congiungente P_0 e P_1 .

Esercizio 6

(i) Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{f(x)y^2}{x} + 5y^2, -y \cos x + 10xy \right),$$

si stabilisca se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ può essere scelta in modo tale che F ammetta un potenziale in tutto il suo dominio di definizione, e nel caso calcolarlo. (ii) Si calcoli l'integrale curvilineo

$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma$, dove

$$G(x, y) = (y \sin x, -\cos x) e^{y(\cos x)}, \quad \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t\pi) + t^3, 1 + t^4).$$

Esercizio 7

Calcolare il lavoro del campo $F(x, y) = (3y, 1 + x)$ sulla curva γ parametrizzata da $\Phi(t) = (t^2, t + \arctan t)$ con $0 \leq t \leq 2$.

Esercizio 8

Considerate il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left[\left(3x^2 + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} \right), \left(3 + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} \right) \right]$$

- dite se vale la condizione delle derivate in croce;
- dite se F è conservativo, e in caso affermativo calcolate un potenziale;
- calcolate l'integrale di F sulla metà superiore dell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ percorsa in verso antiorario.

Esercizio 9

Considerate i campi $F_1(x, y) = (2xy, x^2)$ e $F_2(x, y) = (-y, x)$;

- dite per quali campi vale la condizione delle derivate in croce;

- b) dite se i campi sono conservativi (o se almeno uno lo è) e in caso affermativo calcolate un potenziale;
- c) calcolate l'integrale di $F_1 + F_2$ sul bordo del rettangolo $[0, 3] \times [0, 1]$ percorso in verso antiorario.

Esercizio 10

Considerate il campo vettoriale $F(x, y) = (-y, 3x)$

- a) dite se per F vale la condizione delle derivate in croce;
- b) dite se esiste un numero c tale che $F(x, y) - c(x, -y)$ sia conservativo;
- c) calcolate l'integrale di F sulla curva che si ottiene percorrendo nell'ordine il segmento verticale da $(4, 0)$ a $(4, 2)$, poi tre quarti della circonferenza centrata in $(2, 2)$ fino a $(2, 0)$, infine la metà superiore della circonferenza centrata in $(3, 0)$ fino a tornare al punto di partenza.

Esercizio 11

Considerate il campo vettoriale $F(x, y, z) = (z, x, y)$;

- a) dite se per il campo F vale la condizione delle derivate in croce;
- b) calcolate l'integrale di F sulla curva che si ottiene percorrendo (nell'ordine) prima la curva γ parametrizzata da $(\cos t, \sin t, t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ e poi il segmento che parte dal secondo estremo di γ e arriva al primo estremo di γ .

Esercizio 12

Sia F il campo vettoriale $F(x, y) = (2x \sin y - 3y, x^2 \cos y)$ e sia γ la curva costituita dalla metà inferiore della circonferenza di centro $(\pi, 0)$ e raggio π , percorsa da $(0, 0)$ a $(2\pi, 0)$, seguita dalla parte del grafico della funzione $\sin x$ con $x \in [0, 2\pi]$, percorsa da $(2\pi, 0)$ a $(0, 0)$;

- a) dite se per il campo F valgono le condizioni delle derivate in croce;
- b) dite se F è conservativo;
- c) scrivete F come somma $F_0 + F_1$ di due campi vettoriali con F_0 conservativo;
- d) Calcolate $\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$.

Esercizio 13

Calcolare

$$\int_{\gamma} ye^x dx + \left(e^x + \frac{2}{y} \log y \right) dy$$

ove γ è la curva piana di equazione cartesiana $y = (1 - e)x^2 + e$ per $0 \leq x \leq 1$ percorsa nel verso delle x crescenti.