

Integrali curvilinei di forme differenziali lineari o di campi vettoriali (II specie)

$$I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

dove $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ è un campo vettoriale $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Oss. Si può ottenere formalmente l'uguaglianza se si considera $d\mathbf{s}$ come il vettore di componenti infinitesime (dx, dy, dz) .

Per calcolare un integrale curvilineo di II specie:

a) Si parametrizza la curva γ

$$\gamma: \begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \left[\text{opp. } \gamma = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \right]$$

b) Si calcola il vettore tangente alla curva $\gamma'(t) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt} \right)$

$$\left[\text{opp. } \begin{cases} dx = \gamma_1'(t) dt \\ dy = \gamma_2'(t) dt \\ dz = \gamma_3'(t) dt \end{cases} \right]$$

c) Si calcola il campo vettoriale \mathbf{F} sulla curva γ :

$$\mathbf{G}(t) = (F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)), F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)), F_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)))$$

d) Si calcola infine l'integrale semplice

$$I = \int_a^b \mathbf{G}(t) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \left[F_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t)) \gamma_2'(t) + F_3(\gamma(t)) \gamma_3'(t) \right] dt$$

N.B. Per quanto riguarda l'orientazione si veda il discorso fatto per gli integrali curvilinei di I specie.

OSS. 1 Si osservi che $F_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt = F_1(\gamma(t)) dx$ e analoghe.

OSS. 2

$$\int_a^b \left[F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + F_3(\gamma(t))\gamma_3'(t) \right] \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} dt =$$

$$= \int_a^b \left[F_1(\gamma(t))\tau_1 + F_2(\gamma(t))\tau_2 + F_3(\gamma(t))\tau_3 \right] \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} (\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau}) ds$$

dove $\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ è il versore tangente; inoltre abbiamo

indicato con $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ i coseni direttori di $\vec{\tau}$ (e quindi le sue componenti).

In ultima analisi, pertanto, effettuare l'integrale curvilineo del campo vettoriale \mathbf{F} (o della forma differenziale associata) significa fare l'integrale curvilineo della funzione scalare $\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ (integrale di prima specie). La funzione $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}$ rappresenta la proiezione di \mathbf{F} lungo la direzione tangente alla curva. Si poteva vedere questa cosa in modo più diretto (anche

se forse meno rigoroso) scrivendo $d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} ds$. Si ha allora: $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}) ds$.

Maurizio Schiaulini