Appunti per il corso di Calcolo Numerico Ingegneria Informatica e delle Telecomunicazioni Anno accademico 2004-2005

Si precisa che i seguenti appunti sono estratti da quelli del corso di Calcolo Numerico delle **Professoressa R. Morandi**. La presente versione ne costituisce infatti una versione rivista per i corsi di Ingegneria Informatica e delle Telecomunicazioni tenuti dalla Dott.ssa Costanza Conti. E' importante che lo studente tenga presente che tali appunti costituiscono solo delle linee guida per la preparazione dell'esame. Tutti gli argomenti saranno discussi piu' in dettaglio a lezione (incluso gli esercizi relativi ad ogni argomento) e comunque sono rintracciabili in uno dei testi consigliati. Gli eventuali errori contenuti in questi appunti (di stampa e non) saranno senz'altro segnalati a lezione.

TESTI CONSIGLIATI

[1] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi: Metodi Numerici per l'Algebra Lineare, Zanichelli, Bologna, 1988.

[2] D. Bini, R. Bevilacqua, M. Capovani, O. Menchi: Metodi Numerici, Zanichelli, Bologna, 1992.

[3] G. Monegato: fondamenti di Calcolo Numerico, Levrotto e Bella,Torino, 1998.

ALGORITMI

UN ALGORITMO È:

- UNA SUCCESSIONE FINITA DI ISTRUZIONI
- ASSEGNATE IN MODO NON AMBIGUO
- LA CUI ESECUZIONE CONSENTA DI PASSARE DA UNA SITUAZIONE INIZIALE (DATI) AD UNA SITUAZIONE FINALE (RISULTATI)
- IN UN TEMPO FINITO

REQUISITI FONDAMENTALI

- GENERALITÀ (ADATTO A RISOLVERE UNA CLASSE DI PROBLEMI)
- OTTIMALITÀ (RISPETTO AL TEMPO, AL NUMERO DI OPERAZIONI , ALLA STABILITA', $\cdots$)

1) CALCOLARE LA SOMMA DI n NUMERI $a_1, \ldots, a_n$

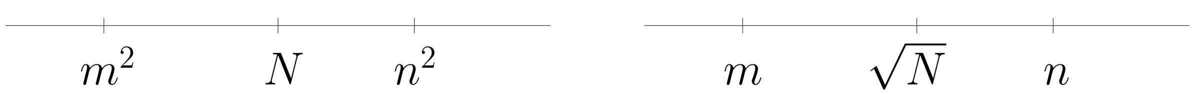
1. Leggi : $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$
2. Poni $s = 0$
3. Per $i = 1, 2, \ldots, n$
    1. Poni $s = s + a_i$
4. Scrivi s
5. Stop

2) CALCOLARE IL PRODOTTO DI n NUMERI $a_1, \ldots, a_n$

1. Leggi $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$
2. Poni $p = 1$
3. Per $i = 1, \ldots, n$
    1. Poni $p = p * a_i$
4. Scrivi p
5. Stop

3) DETERMINARE $\sqrt{N}, N > 0$ MEDIANTE UN PROCEDIMENTO ITERATIVO

1. Individuare $m, n > 0$ tali che
$$m^2 < N < n^2$$
2. Calcolare $c = \dfrac{m+n}{2}$
3. Se $c^2 = N \Longrightarrow c = \sqrt{N} \longrightarrow$ Stop
4. Se $c^2 < N \Longrightarrow$ Sostituire c a m e tornare a 2.
5. Se $c^2 > N \Longrightarrow$ Sostituire c a n e tornare a 2.



N.B.
IL PROCEDIMENTO PUÒ NON FINIRE (ES. $N = 2$)
$\Longrightarrow$ NON E' UN ALGORITMO

CRITERIO DI ARRESTO

DECIDIAMO DI FERMARCI SE

$$|c^2 - N| \leq \varepsilon, \ \varepsilon > 0 \ \text{ È UNA TOLLERANZA}$$

$\Longrightarrow c$ E' UN'APPROSSIMAZIONE DI $\sqrt{N}$ NEI LIMITI DEL CRITERIO DI ARRESTO SCELTO E DELLA TOLLERANZA SCELTA ε

ALGORITMO

1. Leggi: N, m, n, ε
2. Calcola $c = (m + n)/2$
3. Se $|c^2 - N| \leq \varepsilon \Longrightarrow$ Vai a 5.
4. Se $c^2 < N$ poni $m = c$ e vai a 2.
   Altrimenti poni $n = c$ e vai a 2.
5. Scrivi c
6. Stop

N.B. RISCHIO: $[M, N]$ GRANDE E/O ε PICCOLO POTREBBERO IMPLICARE TROPPO TEMPO DI CALCOLO

$\Longrightarrow$ PUO' ESSERE UNA BUONA IDEA FISSARE UN NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI

4) CALCOLO DEL VALORE DI UN POLINOMIO IN UN PUNTO α

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$P_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n$$

ALGORITMO(1)

1. Leggi: $n, a_0, a_1, \ldots, a_n; \alpha$
2. Poni $p = 1$
3. Poni $s = a_0$
4. Per $i = 1, 2, \ldots, n$
    1. Poni $p = \alpha \cdot p$
    2. Poni $s = s + a_i \cdot p$
5. Scrivi s
6. Stop

OPERAZIONI: $2n$ MOLTIPLICAZIONI
n ADDIZIONI

FORMULAZIONE DI HORNER

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
P_n(x) &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1) + a_0 \\
&= x(x(a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_2) + a_1) + a_0 \\
&\vdots \\
&= (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0
\end{aligned}
$$

ALGORITMO(2)

1. Leggi: $n, a_0, a_1, \ldots, a_n; \alpha$
2. Poni $s = a_n$
3. Per $i = n-1, n-2, \ldots, 0$
    1. Poni $s = s \cdot \alpha + a_i$
4. Scrivi s
5. Stop

OPERAZIONI: n MOLTIPLICAZIONI
n ADDIZIONI

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI

SISTEMI DI NUMERAZIONE

BINARIO: CIFRE 0,1
OTTALE: CIFRE 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
⋮
DECIMALE: CIFRE 0 , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- NOTAZIONE POSIZIONALE

  ES. $(123)_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$
  $(123)_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0$
  $(10)_{10} = 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$
  $(10)_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

- IN UN ELABORATORE I NUMERI SONO RAPPRESENTATI IN UNA BASE DIVERSA DA $\beta = 10 \Rightarrow$

  IN GENERALE SONO NECESSARI ALGORITMI DI CONVERSIONE

  RAPPRESENTAZIONE ESTERNA $\leftrightarrows$ RAPP. INTERNA
  $\beta = 10 \leftrightarrows \beta = 2$

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI

NUMERI INTERI

$(a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_\beta,$ con $a_i,\ i = 1, \dots, m$ CIFRE DEL SISTEMA DI NUMERAZIONE $0 \le a_i < \beta$.

NUMERI REALI

UN NUMERO REALE x SI RAPPRESENTA NELLA FORMA VIRGOLA MOBILE NORMALIZZATA (V.M.N.)

$$\pm 0.a_1\ a_2 \dots a_m\ \beta^b \qquad \begin{array}{c} a_1 \neq 0 \\ m \le \infty \end{array}$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$	CIFRE DEL SISTEMA DI NUMERAZIONE
b	UN NUMERO INTERO IN BASE β
$a_1 a_2 \dots a_m$	E' DETTA MANTISSA
b	E' DETTA CARATTERISTICA

ES.

$$\begin{array}{rcll} 0.1471 & \longrightarrow & 0.1471\ 10^0 & \\ 37.1 & \longrightarrow & 0.371\ 10^2 & \quad 0.0371\ 10^3 \\ 0.003 & \longrightarrow & 0.3\ 10^{-2} & \end{array}$$

NOTA:

$x = 0$ HA PER CONVENZIONE MANTISSA $= 0$

CARATTERISTICA $= 0$

RAPPRESENTAZIONE IN MACCHINA DEI NUMERI INTERI

UN ELABORATORE DISPONE DI UN CERTO NUMERO DI BITS PER RAPPRESNTARE I NUMERI (INTERI E REALI).
NUMERI INTERI
LOCAZIONI DI 16/32 BITS (PIÙ COMUNI)

$$1^{\underline{0}} \text{ BIT PER IL SEGNO} \quad \begin{cases} 0 \;\Rightarrow\; N > 0 \\ 1 \;\Rightarrow\; N < 0 \end{cases}$$

AVENDO A DISPOSIZIONE t BITS $\Rightarrow$ SOLO $t-1$ BITS SONO PER LA RAPPRESENTAZIONE VERA E PROPRIA

QUALE E' IL MASSIMO NUMERO N_{max} RAPPRESENTABILE CON t BITS?

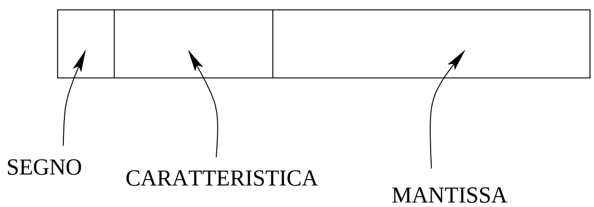
ES: $\beta = 10;\ N = 947584$

$t = 7 \;\Rightarrow\; \boxed{0 \,|\, \underbrace{9 \,|\, 4 \,|\, 7 \,|\, 5 \,|\, 8 \,|\, 4}}$

$t = 5 \;\Rightarrow\;$ <u>OVERFLOW</u>

$$N_{\max} = 9 \times 10^{t-2} + 9 \times 10^{t-3} + \cdots + 9 \times 10^{1} + 9 \times 10^{0} = \boxed{10^{t-1} - 1}$$

RAPPRESENTAZIONE IN MACCHINA DI NUMERI REALI



$\boxed{\text{NUMERI REALI DI MACCHINA}}$:

NUMERI CON MANTISSE E CARATTERISTICHE RAPPRESENTABILI ESATTAMENTE CON I BITS A DISPOSIZIONE

- IL LIMITE SULLA CARATTERISTICA DELIMITA L'ORDINE DI GRANDEZZA DEI DATI

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \text{OVERFLOW} \\ \text{UNDERFLOW} \end{array}$$

- IL LIMITE SULLA MANTISSA CARATTERIZZA LA PRECISIONE

PRECISIONE

IL NUMERO DI CIFRE CHE L'ELABORATORE RISERVA ALLA MANTISSA DEI NUMERI REALI (m) DETERMINA LA PRECISIONE CON LA QUALE L'ELABORATORE LAVORA

SIA $x \neq 0$ UN NUMERO REALE TALE CHE LA SUA RAPPRESENTAZIONE IN v.m.n. RICHIEDE PIÙ DI m CIFRE DI MANTISSA

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_m a_{m+1} \dots a_{m+i} \dots \beta^b$$

$$a_1 \neq 0$$

IN QUESTO CASO x VIENE APPROSSIMATO CIOE' VIENE SOSTITUITO DA UN NUMERO REALE AD ESSO VICINO CHE E' CHIAMATO fl(x) (FLOATING DI x)
LA DETERMINAZIONE DI fl(x) PUÒ AVVENIRE MEDIANTE

TRONCAMENTO $\Rightarrow \text{fl}(x) = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_m \beta^b$
ARROTONDAMENTO $\Rightarrow$

$$\text{fl}(x) = \begin{cases} \pm 0.a_1 a_2 \dots a_m \beta^b & a_{m+1} < \beta/2 \\ \pm 0.a_1 a_2 \dots (a_m + 1)\beta^b & a_{m+1} \geq \beta/2 \end{cases}$$

ESEMPIO
$\beta = 10, \quad m = 5$
$x = 0.93457|81\ 10^3$

$$\text{TRONC} \longrightarrow \text{fl}(x) = 0.93457\ 10^3$$
$$\text{ARR.} \longrightarrow \text{fl}(x) = 0.93458\ 10^3$$

ERRORI NELLA RAPPRESENTAZIONE

SI DEFINISCE

$$
\begin{aligned}
\text{ERRORE ASSOLUTO} \;\; e_A &= |x - \mathrm{fl}(x)| \\
\text{ERRORE RELATIVO} \;\; e_R &= \frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|}
\end{aligned}
$$

ESEMPIO

$\beta = 10, \; m = 4$ TRONC/ARR

1) $x = 0.\underbrace{5895}4 \; 10^5$ $\quad \mathrm{fl}(x) = 0.5895 \; 10^5$

$e_A = |x - \mathrm{fl}(x)| = 0.00004 \; 10^5 = (0.4 \; 10^{-4})10^5 = 0.4 \; 10^1$

$e_R = \dfrac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} = \dfrac{e_A}{|x|} = \dfrac{0.4 \; 10^1}{0.58954 \; 10^5} = c \; 10^{-4}$

2) $y = 0.\underbrace{5895}4 \; 10^{-2}$ $\quad \mathrm{fl}(y) = 0.5895 \; 10^{-2}$

$e_A = |y - \mathrm{fl}(y)| = 0.0000410^{-2} = (0.4 \; 10^{-4})10^{-2} = 0.4 \; 10^{-6}$

$e_R = \dfrac{|y - \mathrm{fl}(y)|}{|y|} = \dfrac{e_A}{|y|} = \dfrac{0.4 \; 10^{-6}}{0.58954 \; 10^{-2}} = c \; 10^{-4}$

- VIENE FATTO LO STESSO TIPO DI OPERAZIONE SU x E y CON LO STESSO RISULTATO
- L'ERRORE RELATIVO E' LO STESSO
- L'ERRORE ASSOLUTO NON E' LO STESSO

L'ERRORE ASSOLUTO E' INFLUENZATO DALL'ORDINE DI GRANDEZZA DEL DATO

L'ERRORE RELATIVO NON E' INFLUENZATO DALL'ORDINE DI GRANDEZZA DEL DATO

L'ERRORE RELATIVO DA' INDICAZIONI SULL' APPROSSIMAZIONE OPERATA SULLA MANTISSA DEL DATO

OVVERO

SULLA ACCURATEZZA (O PRECISIONE) CON CUI IL DATO E' APPROSSIMATO.

- L'ERRORE RELATIVO NON DIPENDE DALLA CARATTERISTICA

  MA

  DIPENDE DALLA MANTISSA

SE VOGLIAMO UNA MISURA DELLA PRECISIONE CON CUI L'ELABORATORE APPROSSIMA UN QUALUNQUE NUMERO REALE DOBBIAMO SVINCOLARCI DA QUESTA DIPENDENZA

COME?

CONSIDERANDO UNA LIMITAZIONE SUPERIORE DEGLI ERRORI DI ARARROTONDAMENTO/TRONCAMENTO RELATIVI

PRECISIONE DI MACCHINA

LIMITAZIONE SUPERIORE DEGLI ERRORI RELATIVI SE SI OPERA PER TRONCAMENTO $\Rightarrow$

$$|\frac{x - \mathrm{fl}(x)}{x}| \leq \beta^{1-m} \qquad \forall x \neq 0$$

SE SI OPERA PER ARROTONDAMENTO $\Rightarrow$

$$|\frac{x - \mathrm{fl}(x)}{x}| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m} \qquad \forall x \neq 0$$

LA QUANTITÀ β^{1-m} O $\frac{1}{2}\beta^{1-m}$ E' DETTA PRECISIONE DI MACCHINA E VIENE DI SOLITO INDICATA CON IL SIMBOLO ε_m.

PIU' AVANTI VEDREMO UN ALGORITMO PER DETERMINARLA.

ARITMETICA FINITA

DATI E RISULTATI SONO MEMORIZZATI CON UN NUMERO FINITO DI CIFRE (m) DI MANTISSA E

QUALUNQUE OPERAZIONE VIENE EFFETTUATA CON UN NUMERO FINITO DI CIFRE (m) DI MANTISSA

NOTA: RISULTATI <u>TEMPORANEI</u> DELLE OPERAZIONI SONO MEMORIZZATI IN APPOSITE LOCAZIONI CON PIÙ CIFRE DI MANTISSA MA IN OGNI CASO IL NUMERO E' FINITO (SI EFFETTUA UN TRONC./ARR.)

LE 4 OPERAZIONI EFFETTUATE SU NUMERI DI MACCHINA NON PRODUCONO NECESSARIAMENTE UN NUMERO DI MACCHINA $\Rightarrow$ IL RISULTATO DEVE ESSERE TRASFORMATO NEL SUO $floating$.

QUINDI

$$\begin{array}{rcccl}
x+y & \text{si scrive} & x \boxplus y & \text{e'} & fl(fl(x)+fl(y)) \\
x-y & \text{si scrive} & x \boxminus y & \text{e'} & fl(fl(x)-fl(y)) \\
x\times y & \text{si scrive} & x \boxtimes y & \text{e'} & fl(fl(x)\times fl(y)) \\
x/y & \text{si scrive} & x \boxtimes y & \text{e'} & fl(fl(x)/fl(y))
\end{array}$$

OPERAZIONI IN MACCHINA

SOMMA ALGEBRICA DI DUE NUMERI REALI:

1 SI TRASFORMA IL NUMERO CON CARATTERISTICA MINORE IN MODO CHE I DUE NUMERI ABBIANO LA STESSA CARATTERISTICA (uno dei due perde la forma v.m.n.);
2 SI SOMMANO LE MANTISSE (lasciando invariate le caratteristiche);
3 SI RICAVA IL FLOATING DEL RISULTATO (si rinormalizza il numero troncando o arrotondando se necessario)

PRODOTTO/DIVISIONE DI DUE NUMERI REALI:

1 SI PRODUCONO/DIVIDONO LE MANTISSE E SI SOMMANO/SOTTRAGGONO LE CARATTERISTICHE
3 SI FA IL FLOATING DEL RISULTATO (si rinormalizza il numero troncando o arrotondando se necessario)

$$\beta = 10,\ m = 4,\ b = 2,\ tronc. \quad x = 10^{-1},\ y = -0.00054$$

$$fl(x) = 0.1000\ 10^0, \quad fl(y) = -0.5400\ 10^{-3}$$

$$x \boxplus y = 0.1000\ 10^0 \boxminus 0.0005\ 10^0 = 0.0995\ 10^0 = 0.9950\ 10^{-1}$$

$$x \boxtimes y = 0.1000\ 10^0 \boxtimes (-0.0005)\ 10^0 = -0.0000510^0\ 10^{-3} = -0.5\ 10^{-4}$$

ALCUNE CONSEGUENZE DELLA PRECISIONE FINITA

PER LE OPERAZIONI DI MACCHINA VALGONO ANCORA LE PROPRIETÀ DELLE QUATTRO OPERAZIONI ARITMETICHE? SPESSO NO

- NON VALE LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA
- NON VALE LA PROPRIETA' DISTRIBUTIVA
- VALE LA PROPRIETA' COMMUTATIVA

FORMULE O ALGORITMI MATEMATICAMENTE EQUIVALENTI (CHE PORTANO ALLO STESSO RISULTATO SE APPLICATI IN ARITMETICA ESATTA) POSSONO PRODURRE RISULTATI DIVERSI IN ARITMETICA FINITA

LO STUDIO DEGLI ERRORI DI ARROTONDAMENTO E DELLA LORO PROPOGAZIONE ATTRAVERSO GLI ALGORITMI E' DI FONDAMENTALE IMPORTANZA PER POTER INTERPRETARE E VALUTARE I RISULTATI DI UN QUALUNQUE ALGORITMO CHE OPERI CON NUMERI REALI

ESEMPIO: $\beta = 10 \quad m = 4 \quad \mathrm{fl}(x)$ per TRONCAMENTO

$$\varepsilon_m = 10^{-3} \quad \longleftarrow \quad \varepsilon_m = \beta^{1-m}$$

$a = 2000 \quad b = 2.5 \quad c = 7.8$

$$\begin{aligned}
(a \boxplus b) \boxplus c &= (0.2000\ 10^4 \boxplus 0.2500\ 10^1) \boxplus 0.7800\ 10^1 = \\
&= (0.2000\ 10^4 \boxplus 0.0002(5)\ 10^4) \boxplus 0.7800\ 10^1 = \\
&= 0.2002\ 10^4 \boxplus 0.7800\ 10^1 = \\
&= 0.2002\ 10^4 \boxplus 0.0007(8)\ 10^4 = \boxed{0.2009\ 10^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \boxplus (b \boxplus c) &= 0.2000\ 10^4 \boxplus (0.2500\ 10^1 \boxplus 0.7800\ 10^1) = \\
&= 0.2000\ 10^4 \boxplus 0.1030\ 10^2 = \\
&= 0.2000\ 10^4 \boxplus 0.0010(3)\ 10^4 = \boxed{0.2010\ 10^4}
\end{aligned}$$

$(a + b) + c = a + (b + c) = 2010.3$
$(a \boxplus b) \boxplus c \neq a \boxplus (b \boxplus c)$

$$\text{ERRORI ASSOLUTI} \quad \begin{cases} 2010.3 - 2009 = 1.3 \\ 2010.3 - 2010 = 0.3 \end{cases}$$

$$\text{ERRORI RELATIVI} \quad \begin{cases} 1.3/2010.3 \simeq 10^{-3} \\ 0.3/2010.3 \simeq 10^{-4} \end{cases}$$

NOTA: RISULTATI DIVERSI MA ACCETTABILI NEI LIMITI DELLA PRECISIONE USATA

ESEMPIO: $\beta = 10 \quad m = 3 \quad \varepsilon_m = \beta^{1-m} = 10^{-2}$

$a = 0.651 \quad b = 0.653$

$\boxed{c = \frac{(a+b)}{2}}$

0.651 0.652 0.653

$$(0.651\ 10^0 \boxplus 0.653\ 10^0) \boxdot 2 =$$
$$= 0.130\ 10^1 \boxdot 2 = \boxed{0.650\ 10^0} \quad \notin [a, b]$$

$\boxed{c = a + \frac{(b-a)}{2}}$

$$0.651\ 10^0 \boxplus (0.653\ 10^0 \boxminus 0.651\ 10^0) \boxdot 2 =$$
$$= 0.651\ 10^0 \boxplus (0.200\ 10^{-2}) \boxdot 2 =$$
$$= 0.651\ 10^0 \boxplus 0.100\ 10^{-2} = 0.651\ 10^0 \boxplus 0.0010\ 10^0 =$$
$$= \boxed{0.652\ 10^0}$$

FORMULE MATEMATICAMENTE EQUIVALENTI NON LO SONO PIÙ QUANDO SI OPERA IN ARITMETICA FINITA

IMPORTANTE

IL CONCETTO DI UGUAGLIANZA VA MODIFICATO QUANDO SI LAVORA SUI NUMERI REALI IN PRECISIONE FINITA

RISULTATI DIVERSI POSSONO ESSERE CONSIDERATI UGUALI NEI LIMITI DELLA PRECISIONE USATA

DUE NUMERI SONO UGUALI QUANDO HANNO UGUALE CARATTERISTICA E UGUALE MANTISSA

MA

DUE NUMERI SONO DA CONSIDERARSI UGUALI QUANDO LA LORO DIFFERENZA E' PICCOLA RISPETTO ALLA PRECISIONE DI MACCHINA

OVVERO

DUE NUMERI a, b IN PRECISIONE FINITA SONO DA CONSIDERARSI UGUALI QUANDO

$$|a - b| \leq \varepsilon$$

DOVE ε E' UN NUMERO, DETTO TOLLERANZA, IL CUI VALORE DIPENDE DALLA PRECISIONE DI MACCHINA

QUINDI

- NELL'ESEMPIO DEL PUNTO MEDIO I DUE NUMERI

$$a = 0.651 \qquad b = 0.653$$

POTEVANO ESSERE CONSIDERATI UGUALI INFATTI

$$|b - a| = 2\ 10^{-3} \quad \varepsilon_m = 10^{-2}$$

N.B. GLI STESSI NUMERI NON POTREBBERO ESSERE CONSIDERATI UGUALI SE FOSSE $\varepsilon_m = 10^{-8}$

- SE IL RISULTATO DI UN ALGORITMO IN PRECISIONE INFINITA E' ZERO E L'ALGORITMO REALIZZATO IN PRECISIONE FINITA DÀ UN RISULTATO DIVERSO DA ZERO MA PICCOLO, NON POSSIAMO CONCLUDERE CHE L'ELABORATORE ABBIA SBAGLIATO

- SE UN ALGORITMO PREVEDE UN <u>CONTROLLO SULLA UGUAGLIANZA TRA DUE REALI</u> DOBBIAMO FARE MOLTA ATTENZIONE NEL REALIZZARLO IN UN PROGRAMMA

$$a = b \Rightarrow |a - b| \leq \varepsilon$$

IL VALORE ε DEVE ESSERE SCELTO TENENDO CONTO DELLA <u>PRECISIONE DI MACCHINA</u> E, IN GENERALE, <u>DA CONSIDERAZIONI INDOTTE DAL CONTESTO</u>

ALGORITMO PER IL CALCOLO DI ε_m

LA CONOSCENZA DI ε_m E' FONDAMENTALE PER

- VALUTARE I RISULTATI
- SCEGLIERE LE TOLLERANZE

$\Rightarrow$ SERVE UN ALGORITMO PER CALCOLARLA

<u>IDEA SU CUI PUÒ ESSERE BASATO L'ALGORITMO</u>

$\beta = 10, \quad m = 8 \quad$ TRONCAMENTO $\Rightarrow \varepsilon_m = 10^{-7} = \beta^{1-m}$
CALCOLIAMO $\mathrm{fl}(1+10^{-6}),\ \mathrm{fl}(1+10^{-7}),\ \mathrm{fl}(1+10^{-8})$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fl}(1+10^{-6}) &= 0.10000000\ 10^1 \boxplus 0.10000000\ 10^{-5} = \\
&= 0.10000000\ 10^1 \boxplus 0.00000010\ 10^1 = 0.10000010\ 10^1 \\
\mathrm{fl}(1+10^{-7}) &= 0.10000000\ 10^1 \boxplus 0.10000000\ 10^{-6} = \\
&= 0.10000000\ 10^1 \boxplus 0.00000001\ 10^1 = 0.10000001\ 10^1 \\
\mathrm{fl}(1+10^{-8}) &= 0.10000000\ 10^1 \boxplus 0.10000000\ 10^{-7} = \\
&= 0.10000000\ 10^1 \boxplus 0.00000000|1\ 10^1 = 0.10000000|1\ 10^1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \varepsilon_m$ E' LA PIÙ PICCOLA POTENZA DELLA BASE $\beta = 10$
CHE VIENE SENTITA IN MACCHINA SE SOMMATA A 1

ALGORITMO PER DETERMINARE ε_m IN BASE β

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{fl}(1+\beta^{-p}) \neq \mathrm{fl}(1) \\ \mathrm{fl}(1+\beta^{-p-1}) = \mathrm{fl}(1) \end{array}\right. \Rightarrow \varepsilon_m = \beta^{-p}$$

1. Poni $\varepsilon_m = 1$
2. Poni $\varepsilon_m = \beta^{-1} * \varepsilon_m$
3. Poni $a = 1 + \varepsilon_m$
4. Se $a > 1$ vai a 2.
   Altrimenti vai a 5.
5. Poni $\varepsilon_m = \beta * \varepsilon_m$
6. Stampa ε_m

CONSIDERAZIONI SULLE QUATTRO OPERAZIONI ARITMETICHE

SUPPONIAMO DI EFFETTUARE OPERAZIONI ESATTE

PRODOTTO

$$\frac{x_1x_2 - \overbrace{x_1(1+\varepsilon_1)}^{\mathrm{fl}(x_1)} \cdot \overbrace{x_2(1+\varepsilon_2)}^{\mathrm{fl}(x_2)}}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2 - (x_1 + x_1\varepsilon_1)(x_2 + x_2\varepsilon_2)}{x_1x_2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 - x_1x_2 - x_1x_2\varepsilon_2 - x_1x_2\varepsilon_1 - x_1x_2\varepsilon_1\varepsilon_2}{x_1x_2} \cong -\varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

DIVISIONE $\qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_m$

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1(1+\varepsilon_1)}{x_2(1+\varepsilon_2)}}{\frac{x_1}{x_2}} = 1 - \frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} = \frac{1+\varepsilon_2-1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} =$$

$$= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} \simeq \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

SOMMA ALGEBRICA

$$\frac{(x_1+x_2) - x_1(1+\varepsilon_1) - x_2(1+\varepsilon_2)}{x_1+x_2} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 - x_1 - x_1\varepsilon_1 - x_2 - x_2\varepsilon_2}{x_1+x_2} =$$

$$= \frac{-x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 - \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2$$

ESAMINANDO GLI ERRORI RELATIVI SI PUÒ AFFERMARE CHE LA SOMMA DI DUE NUMERI DI SEGNO OPPOSTO PUÒ CAUSARE UN'AMPLIFICAZIONE DEGLI ERRORI NEI DUE OPERANDI QUANDO $x_1 + x_2 \approx 0$

IL RISULTATO E' ANALOGO ANCHE QUANDO SI SOSTITUISCE L'OPERAZIONE ARITMETICA ESATTA CON QUELLA DI MACCHINA

CANCELLAZIONE NUMERICA

PERDITA DI CIFRE SIGNIFICATIVE DOVUTA A SOTTRAZIONE TRA OPERANDI QUASI UGUALI

ES:

$\beta = 10 \quad m = 6$ ARROTONDAMENTO

$$\begin{array}{ll} a = 0.147554326 & \bar{a} = 0.147554 \\ b = 0.147251742 & \bar{b} = 0.147252 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (a - b) = 0.000302584 & = & 0.302584\ 10^{-3} \\ (\bar{a} \boxminus \bar{b}) = 0.000302 & = & 0.302000\ 10^{-3} \end{array}$$

LA PERDITA DI CIFRE SIGNIFICATIVE HA LA SUA ORIGINE NEGLI ERRORI SUI DATI

ESEMPIO:

PERDITA DI PRECISIONE E FORMULAZIONE ALTERNATIVA

$$x^2 - 2bx + c = 0$$

$$x_1 = b + \sqrt{b^2 - c} \qquad x_2 = b - \sqrt{b^2 - c}$$

SE $|c| \ll b$

$$b - \mathrm{sgn}(b)\sqrt{b^2 - c}$$

COMPORTA LA DIFFERENZA TRA NUMERI QUASI UGUALI

FORMULA ALTERNATIVA

$$x_1 = b + \mathrm{sgn}(b)\sqrt{b^2 - c}, \qquad x_2 = \frac{c}{x_1}$$

RIASSUMENDO

1) SI COMMETTONO ERRORI NELLA RAPPRESENTAZIONE DI NUMERI REALI

2) SI COMMETTONO ERRORI NELL'ESECUZIONE DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE

IDEA (TRANQUILLIZZANTE MA SBAGLIATA):
POICHÈ GLI ERRORI SONO PICCOLI ANCHE I RISULTATI SONO AFFETTI DA ERRORI PICCOLI

POICHE' NON POSSIAMO BASARCI SU TALE RASSICURANTE IDEA, E' IMPORTANTE OCCUPARSI DELLE SEGUENTI QUESTIONI:

PROBLEMA $\longrightarrow$ SOLUZIONE
SE SI ALTERANO I DATI DEL PROBLEMA, COME SI ALTERA LA SOLUZIONE? (ANALISI DEL CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA)

PROBLEMA $\longrightarrow$ ALGORITMO $\longrightarrow$ SOLUZIONE
COME SI PROPAGANO GLI ERRORI DELLE OPERAZIONI NELL'ALGORITMO? (ANALISI DELLA STABILITA' DELL' ALGORITMO)

CONDIZIONAMENTO DI UN SISTEMA LINEARE

$\boxed{\text{PROBLEMA}} \longrightarrow \boxed{\text{SOLUZIONE}}$

SI CONSIDERI IL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 1.00001x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{LA SOLUZIONE E'} \qquad \begin{bmatrix} 100001 \\ 100000 \end{bmatrix}$$

CONSIDERIAMO IL NUOVO SISTEMA

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 0.99999x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{LA SOLUZIONE E'} \qquad \begin{bmatrix} -99999 \\ -100000 \end{bmatrix}$$

UN CAMBIAMENTO (IN VALORE ASSOLUTO) DI

$$0.00002 = 2 \cdot 10^{-5}$$

IN UN ELEMENTO DELLA MATRICE HA PROVOCATO UN CAMBIAMENTO (IN VALORE ASSOLUTO) DI

$$200000 = 2 \cdot 10^{5}$$

NELLE COMPONENTI DELLA SOLUZIONE

$$\frac{\begin{pmatrix} \text{ORDINE DI GRANDEZZA} \\ \text{CAMBIAMENTO RISULTATI} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{ORDINE DI GRANDEZZA} \\ \text{CAMBIAMENTO DATI} \end{pmatrix}} \simeq \frac{10^5}{10^{-5}} = 10^{10}$$

STABILITA' DI UN ALGORITMO

$\boxed{\text{PROBLEMA}} \longrightarrow \boxed{\text{ALGORITMO}} \longrightarrow \boxed{\text{SOLUZIONE}}$

STUDIAMO LA PROPAGAZIONE GLI ERRORI DOVUTI ALLE OPERAZIONI EFFETTUATE NEL CORSO DELL' ALGO RITMO

UN ALGORITMO SI DICE STABILE SE L'INFLUSSO DEGLI ERRORI RIMANE LIMITATO

L'ALGORITMO A E' PIÙ STABILE DELL' ALGORITMO B SE L'INFLUENZA DEGLI ERRORI E' MINORE

ESEMPIO: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

SI VUOLE STIMARE e^{-13}

METODO 1: $e^{-13} = 1 - 13 + \frac{13^2}{2!} - \frac{13^3}{3!} + \frac{13^4}{4!} + \cdots$

la sottrazione e' pericolosa!!!

METODO 2: $e^{-13} = \frac{1}{e^{13}} = 1/(1 + 13 + \frac{13^2}{2!} + \cdots)$

n	M_1	M_2
30	$2.93783393\ 10^{-5}$	$2.26036459\ 10^{-6}$
40	$9.37448635\ 10^{-5}$	$2.26032941\ 10^{-6}$
50	$-1.32982788\ 10^{-5}$	$2.26032941\ 10^{-6}$
58	$-1.32986125\ 10^{-5}$	

NORME DI VETTORI E DI MATRICI

IL CONCETTO DI NORMA E' UNA GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI LUNGHEZZA DI UN VETTORE $x \in \mathbb{R}^n$ O DI UNA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

DEFINIZIONE:UNA FUNZIONE DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$

$$x \to \|x\|$$

TALE CHE

1) $\|x\| \geq 0$ E $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$

È UNA NORMA VETTORIALE

ESEMPI

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x} \qquad \text{NORMA 2}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{NORMA 1}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \qquad \text{NORMA } \infty$$

NORME MATRICIALI

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE DA $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

$$A \to \|A\| \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

TALE CHE

1) $\|A\| \geq 0$ E $\|A\| = 0 \iff A = 0$
2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

È DETTA NORMA MATRICIALE

ESEMPI

$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}^2}$ NORMA DI FROBOENIUS

$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i(A^T A)|}$ NORMA 2

$\nwarrow$ MSSIMO AUTOVALORI IN MODULO DI $A^T A$

$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ NORMA 1

$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ NORMA ∞

PROPRIETÀ DI NORME MATRICIALI INDOTTE

AD OGNI NORMA VETTORIALE E' POSSIBILE ASSOCIARE UNA CORRISPONDENTE NORMA MATRICIALE

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

LA $\|\bullet\|_2$, LA $\|\bullet\|_1$ E LA $\|\bullet\|_\infty$ SONO NORME MATRICIALI INDOTTE DALLE CORRISPONDENTI NORME VETTORIALI. LE NORME MATRICIALI INDOTTE SODDISFANO INOLTRE:

- $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^n$

- $\|I\| = 1 \qquad I \in \mathbb{R}^n$ matrice identità

- $\rho(A) \leq \|A\|$ DOVE IL RAGGIO SPETTRALE DI A E'
  $$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| \leq \|A\|$$
  ($\rho(A)$ e' cioe' il massimo autovalore di A in modulo)

CONDIZIONAMENTO DI A
(per la risoluzione di $Ax = b$)

SIA $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad b \in \mathbb{R}^n$; $Ax = b$; $det(A) \neq 0 \;\rightarrow \exists\; A^{-1}$

COME SI RIPERCUOTONO SUI RISULTATI LE VARIAZIONI SUI DATI?

CASO SEMPLICE: PERTURBAZIONE SOLO SU b.

SE δb E' IL VETTORE PERTURBAZIONE $Ax = b$ DIVENTA $A(x + \delta x) = b + \delta b$

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \;\Rightarrow Ax + A\delta x = b + \delta b \Rightarrow A\delta x = \delta b$$

$$Ax = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$A\delta x = \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\downarrow} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}} \cdot \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}$$

ERRORE RELATIVO SUI RISULTATI

$K(A)$
INDICE DI CONDIZIONAMENTO

ERRORE RELATIVO SUI DATI

CASO GENERALE

GENERALIZZIAMO AL CASO DI UNA PERTURBAZIONE ANCHE SU A.
SIA δA LA PERTURBAZIONE

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot (\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|})$$

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}} \quad \leq \quad \underbrace{K(A)} \cdot \underbrace{(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|})}$$

ERRORE RELATIVO SUI DATI

INDICE DI CONDIZIONAMENTO

ERRORE RELATIVO SUI RISULTATI

ESEMPIO

MATRICE DI HILBERT

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

n	$K_2(H_n)$
2	$1.2\ 10^1$
3	$1.9\ 10^2$
4	$6.5\ 10^3$
5	$1.8\ 10^5$
6	$4.4\ 10^6$
7	$1.3\ 10^8$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x_1 - 0.99999x_2 & = & 1 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{cases}$$

SOTTRAENDO LE DUE RIGHE IN PRECISIONE INFINITA ABBIAMO

$$(1 - 0.99999)x_2 = 1 \Rightarrow 10^{-5}x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 10^5$$
$$x_1 = x_2 = 10^5$$

CONSIDERANDO IL SISTEMA PERTURBATO

$$\begin{cases} x_1 - 1.00001x_2 & = & 1 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{cases}$$

SEMPRE IN PRECISIONE INFINITA ABBIAMO

$$(1 - 1.00001)x_2 = 1 \Rightarrow 10^5 x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = -10^5$$
$$x_1 = -10^5$$

CALCOLIAMO LE VARIAZIONI SUI DATI E QUELLE SUI RISULTATI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.99999 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A + \delta A = \begin{pmatrix} 1 & -1.00001 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\delta A = A - \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{2 \cdot \ 10^{-5}}{2} = 10^{-5}$$

$$x = \begin{pmatrix} 10^5 \\ 10^5 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} -10^5 \\ -10^5 \end{pmatrix} \quad \delta x = x - \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^5 \\ 2 \cdot 10^5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{2 \cdot 10^5}{10^5} = 2$$

CALCOLIAMO $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. RISULTA $\|A\|_\infty = 2$

CALCOLIAMO QUINDI L'INVERSA DI $A^{\circledast}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-10^{-5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0.99999 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = 10^5 \cdot 2$$

IN CONCLUSIONE RISULTA $K(A) = 2 \cdot 2 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^5$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \ ; \ (2 \leq 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5})$$

$$\circledast \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ ; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

da usare solo nel caso di matrici 2×2.

OSSERVAZIONI SU $K(A)$

- $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$
- NON CI SONO RELAZIONI TRA ORDINE DEL SISTEMA n E $K(A)$
- NON CI SONO RELAZIONI TRA $\det(A)$ E $K(A)$

ES.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = n$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \cdots & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-4} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 2^{n-1}$$

$$\left(1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 1 + (2^{n-1} - 1)\right)$$

$K_\infty(A) = n \cdot 2^{n-1}$ SE n E' GRANDE A E'

MALCONDIZIONATA MA PER OGNI n RISULTA $\det(A) = 1$

ES.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A = \mathrm{diag}(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10}) \\ \|A\|_\infty = \frac{1}{10} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 10 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A^{-1} = \mathrm{diag}(10, 10, \ldots, 10) \\ \|A^{-1}\|_\infty = 10 \end{array}$$

$$K(A)_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$$

$\det(A) = 10^{-n}$ (n GRANDE DETERMINANTE PICCOLO)

- IN PRATICA E' MOLTO COSTOSO CALCOLARE $K(A)$ (IL CALCOLO DI A^{-1} RICHIEDE LA RISOLUZIONE DI n SISTEMI LINEARI)
- SI PUÒ STIMARE $K(A)$ PERTURBANDO I DATI E CONTROLLANDO LA SOLUZIONE

SISTEMI LINEARI

SIANO $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$: IL PROBLEMA È DETERMINARE LA SOLUZIONE, SE ESISTE, DI

$$Ax = b\ .$$

LA SOLUZIONE ESISTE ED È UNICA SE E SOLO SE LA MATRICE A È NON SINGOLARE ($\det(A) \neq 0$)

METODO NOTO: REGOLA DI CRAMER $\Rightarrow$
$x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = 1, \dots, n$

DOVE A_i È LA MATRICE OTTENUTA DA A SOSTITUENDO ALLA i-ESIMA COLONNA IL VETTORE b.
I DETERMINANTI COINVOLTI POTREBBERO ESSERE CALCOLATI CON LA REGOLA DI LAPLACE,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j})$$

DOVE A_{1j} RAPPRESENTA LA MATRICE DI ORDINE $n-1$ OTTENUTA DA A ELIMINANDO LA PRIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA.

PROBLEMA: IL NUMERO DI OPERAZIONI ARITMETICHE COINVOLTE SUPERA $(n+1)!$ ($10! \cong 3.6 \times 10^6$, $20! \cong 2.4 \times 10^{18}$, $50! \cong 3 \times 10^{64}$)

METODI NUMERICI PER LA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

METODI DIRETTI: COSTRUISCONO LA SOLUZIONE ESATTA, IN ASSENZA DI ERRORI DI ARROTONDAMENTO, IN UN NUMERO FINITO DI PASSI

(PER MATRICI DENSE E DI ORDINE NON ELEVATO)

METODI ITERATIVI: COSTRUISCONO UNA SUCCESSIONE DI VETTORI, CONVERGENTE SOTTO OPPORTUNE CONDIZIONI, ALLA SOLUZIONE
$\Rightarrow$ NECESSITANO DI CRITERI DI ARRESTO

(PER MATRICI SPARSE E DI ORDINE ELEVATO)

CASI FACILMENTE RISOLUBILI

1) A DIAGONALE

$$x_i = b_i/a_{ii},\ i = 1, \dots, n\ (\det(A)) \neq 0 \iff a_{ii} \neq 0\ \forall\ i$$

2) A TRIANGOLARE $\Rightarrow$ ALGORITMO BASATO SU SOSTITUZIONI IN AVANTI (TRIANG. SUP.) O ALL'INDIETRO (TRIANG. INF.)

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$x_1 = b_1/a_{11}$

$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$

$\vdots$

$$x_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k)/a_{ii},\ i = 3, \dots, n$$

$(\det(A) \neq 0 \iff a_{ii} \neq 0\ \forall\ i)$

N.B.

1) COSTO COMPUTAZIONALE: n

2) COSTO COMPUT. : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \mathrm{O}(\frac{n^2}{2})$

INFATTI PER CALCOLARE x_i OCCORRONO $(i-1)$ MOLTIPLICAZIONI E 1 DIVISIONE $\Rightarrow$ i OPERAZIONI (TRASCURANDO LE SOMME) QUINDI OTTENIAMO $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$

ALGORITMO

1. Leggi
2. Calcola $x_1 = b_1/a_{11}$
3. Calcola $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$
4. Per $i = 3, \ldots, n$

   4.1 Calcola $x_i = (b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k)/a_{ii}$
5. Stampa x
6. Stop

CALCOLO DELL'INVERSA DI UNA MATRICE

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (AA^{-1} = A^{-1}A = I)$$

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

ES. $n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \underbrace{x_{31}}_{x_1} & \underbrace{x_{32}}_{x_2} & \underbrace{x_{33}}_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{e_1} & \underbrace{0}_{e_2} & \underbrace{1}_{e_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} & = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} & = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} & = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad Ax_1 = e_1$$

ANALOGO SISTEMA CON LA SECONDA COLONNA $\qquad \Rightarrow \qquad Ax_2 = e_2$

ANALOGO SISTEMA CON LA TERZA COLONNA $\qquad \Rightarrow \qquad Ax_3 = e_3$

QUESTO METODO VALE ANCHE PER $n > 3$

METODO DI GAUSS

DATO IL SISTEMA $\quad Ax = b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

SE L'ELEMENTO PIVOT $a_{11} \neq 0$ RICAVIAMO

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k)$$

SOSTITUENDO NELLA SECONDA EQUAZIONE

$$a_{21} \cdot \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k) + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13})x_3 + \cdots = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

SOSTITUENDO NELLA i-ESIMA EQUAZIONE

$$(a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{i3} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{13})x_3 + \cdots = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1$$

QUINDI PERVENIAMO AL SISTEMA

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 & + & a_{12}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)}x_n & = & b_1^{(2)} \\ 0 & & a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & & \\ 0 & & a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{cases}$$

SE $a_{22}^{(2)} \neq 0 \iff (a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}) \neq 0 \iff \dfrac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0$
($a_{22}^{(2)}$ elemento pivot) RICAVIAMO x_2, SOSTITUIAMO ED OTTENIAMO

$$\begin{cases} a_{11}^{(3)}x_1 & + & a_{12}^{(3)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(3)}x_n & = & b_1^{(3)} \\ 0 & + & a_{22}^{(3)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(3)}x_n & = & b_2^{(3)} \\ 0 & & 0 & & a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots & + & a_{3n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \\ 0 & & 0 & & a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots & + & a_{nn}^{(3)}x_n & = & b_n^{(3)} \end{cases}$$

SE $a_{kk}^{(n)} \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1$ DOPO $(n-1)$ PASSI OTTENIAMO ($a_{kk}^{(n)}$ elemento pivot)

$$\begin{cases} a_{11}^{(n)}x_1 & + & a_{12}^{(n)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(n)}x_n & = & b_1^{(n)} \\ & & a_{22}^{(n)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(n)}x_n & = & b_2^{(n)} \\ & & & & a_{33}^{(n)}x_3 + \cdots & + & a_{3n}^{(n)}x_n & = & b_3^{(n)} \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \end{cases}$$

ALGORITMO DI GAUSS

1. Per $k = 1, \ldots, n-1$
   1.2 Se $a_{kk} = 0$ stop
      1.2.1 $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
      1.2.2 Per $j = k+1, \ldots, n$
         1.2.2.1 $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$
      1.2.3 $b_i = b_i - m_{ik}b_k$
      1.2.4 $a_{ik} = 0$

      (risoluzione del sistema triangolare)
2. Se $a_{nn} = 0$ stop
3. $x_n = b_n/a_{nn}$
4. Per $i = n-1, \ldots, 1$
   4.1 $x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k)$

$$A^{(k)} = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \text{INVARIATO} \\
0 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & & \cdots \\
 & & & & 0 & . & & \cdots \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \\
0 & & & & 0 & \vdots & & \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \\
 & & & & 0 & \vdots & &
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ k \\ k+1 \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
k \;\; k+1 &
\end{array}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 4 & -6 \\ -7 & 17 & 9 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

RISOLUZIONE CON IL METODO DI GAUSS DI $Ax = b$

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 4 & -6 & 9 \\ -7 & 17 & 9 & 19 \\ -1 & -4 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

1^0 PASSO $a_{11}^{(1)} = 11 \neq 0$

$k = 1 \quad i = 2$

$$m_{21} = a_{21}/a_{11} = \frac{-7}{11}$$

$j = 2$

$$a_{22} = a_{22} - m_{21}a_{12} = 17 - (\frac{-7}{11})4 = \frac{215}{11}$$

$j = 3$

$$a_{23} = a_{23} - m_{21}a_{13} = 9 - (\frac{-7}{11})(-6) = \frac{57}{11}$$

$$b_2 = b_2 - m_{21}b_1 = 19 - (\frac{-7}{11})9 = \frac{272}{11}$$

$$\Downarrow$$

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & \frac{215}{11} & \frac{57}{11} & \frac{272}{11} \\ 0 & -\frac{40}{11} & \frac{60}{11} & \frac{20}{11} \end{array}\right]$$

2^0 PASSO $\quad a_{22}^{(2)} = \dfrac{215}{11} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$[A^{(3)} \mid b^{(3)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & \frac{215}{11} & \frac{57}{11} & \frac{272}{11} \\ 0 & 0 & \frac{276}{43} & \frac{276}{43} \end{array}\right]$$

SI PROCEDE POI ALLA RISOLUZIONE DEL SISTEMA

$$x_3 = b_3/a_{33} = \frac{276}{43}/\frac{276}{43} = 1$$

$i = 2$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - \sum_{k=3}^{3} a_{2k}x_k) = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{23}x_3)$$

$$= 1/\frac{215}{11} \cdot (\frac{272}{11} - \frac{57}{11} \cdot 1) = \frac{11}{215} \cdot (\frac{215}{11}) = 1$$

$i = 1$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{k=2}^{3} a_{1k}x_k) = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$= \frac{1}{11}(9 - 4 + 6) = \frac{1}{11} \cdot 11 = 1$$

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA È $\quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

SE $a_{11}^{(1)} \neq 0 \implies 1^0$ PASSO DI GAUSS

$\Downarrow$

$\det(A_1) \neq 0$ $\quad$ A_1 MINORE PRINCIPALE DI A
DI ORDINE 1

SE $a_{22}^{(2)} \neq 0 \implies 2^0$ PASSO DI GAUSS

$\Downarrow$

$\det(A_2) \neq 0$ $\quad$ A_2 MINORE PRINCIPALE DI A
DI ORDINE 2

$\vdots$

SE $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \implies k^{\text{esimo}}$ PASSO DI GAUSS

$\Downarrow$

$\det(A_k) \neq 0$ $\quad$ A_k MINORE PRINCIPALE DI A
DI ORDINE k $\quad \dots$

GAUSS PUÒ ESSERE APPLICATO SE TUTTI I MINORI PRINCIPALI DI A FINO ALL'ORDINE $n-1$ HANNO DETERMINANTE $\neq 0$. VALE IL SEGUENTE

TEOREMA SIA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ TALE CHE $\det(A_k) \neq 0$ $k = 1, \dots, n-1$ (A_k MINORE PRINCIPALE DI ORDINE k) ALLORA IL METODO DI GAUSS E' APPLICABILE. INOLTRE $det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$.

IL METODO DI GAUSS CON PERMUTAZIONE

$$\begin{cases} \quad\quad\;\; x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \det(A) = 6 \neq 0 \quad \text{MA} \quad a_{11}^{(1)} = 0$$

$\Longrightarrow$ SCAMBIO LA SECONDA E LA PRIMA RIGA

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ \quad\quad\;\; x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ED APPLICO GAUSS SENZA PROBLEMI

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to m_{21} = 0,\ m_{31} = 2$$

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right] \to m_{32} = 3$$

$$[A^{(3)} \mid b^{(3)}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

GAUSS IN PRECISIONE FINITA

SIA IL SISTEMA $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon > 0 \text{ “PICCOLO”}$$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE DEL SISTEMA E' $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

IL PROBLEMA È BEN CONDIZIONATO. INFATTI

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{bmatrix} \;; \qquad \begin{matrix} \|A^{-1}\|_\infty = 1+\varepsilon \\ \|A\|_\infty = 1+\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow K(A) = (1+\varepsilon)^2$$

$K(A)$ È DI POCO SUPERIORE AD 1 PER ε PICCOLO

SUPPONIAMO $\varepsilon = 0.3\ 10^{-3}$, $\beta = 10$, $m = 3$ ARROT.

A PARTIRE DA $[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = [A \mid f]$ DOPO UN PASSO OTTENIAMO

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.3\ 10^{-3} & 1 & 1+0.3\ 10^{-3} \\ 0 & -0.333\ 10^{4} & -0.333\ 10^{4} \end{array}\right]$$

DA

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.3\ 10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & -0.333\ 10^{4} & -0.333\ 10^{4} \end{array}\right]$$

E PER SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO OTTENIAMO

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.1000\ 10^{1} - 0.100\ 10^{1}}{0.3\ 10^{-3}} \\ \dfrac{-0.333\ 10^{4}}{-0.333\ 10^{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'ERRORE DI CUI È AFFETTA LA SOLUZIONE NON DIPENDE DAL MAL CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA

MA

ALL'INSTABILITÀ DEL METODO DI GAUSS

RIMEDIO: SCAMBIARE LE RIGHE (per aumentare l'elemento pivot)

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 1+\varepsilon \end{array}\right]$$

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+\varepsilon-\varepsilon \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow\ \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ RIOTTENIAMO LA SOLUZIONE ESATTA

STRATEGIA DEL MASSIMO PIVOT

UNA STRATEGIA PER IL METODO DI GAUSS CHE CONSENTE DI CONTENERE GLI ERRORI È EVITARE LA SCELTA DI UN DIVISORE PICCOLO NELLA COSTRUZIONE DEI MOLTIPLICATORI.

AL PASSO k-ESIMO SI SCAMBIA LA RIGA k-ESIMA CON LA RIGA i-ESIMA ($i \geq k$) TALE CHE

$$|a_{ik}^{(k)}| = \max_{j=k,\ldots,n} |a_{jk}^{(k)}|$$

TALE TECNICA SI CHIAMA PIVOTING PARZIALE (NON RICHIEDE IL RIORDINAMENTO DELLE INCOGNITE)

UNA VARIANTE CONSISTE NELLO SCAMBIO OPPORTUNO DI RIGHE E COLONNE CIOÈ
AL PASSO k-ESIMO SI SCAMBIA LA RIGA k-ESIMA CON LA RIGA i-ESIMA ($i \geq k$) E LA COLONNA k-ESIMA CON LA COLONNA j-ESIMA ($j \geq k$) TALE CHE

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{j,t=k,\ldots,n} |a_{j,t}^{(k)}|$$

TALE TECNICA SI CHIAMA PIVOTING TOTALE (RICHIEDE IL RIORDINAMENTO DELLE INCOGNITE)

ESEMPIO

MATRICE DI HANKEL A_n DI ORDINE n I CUI ELEMENTI SONO

$$a_{i,n+k-i}^{(n)} = \begin{cases} 2^k & k > 0 \\ 2^{1/(2-k)} & k \leq 0 \end{cases}, \; i = 1, \dots, n, \; k = i+1-n, \dots, n$$

$n = 4$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{2} & \sqrt[3]{2} & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt[3]{2} & \sqrt{2} & 2 & 2^2 \\ \sqrt{2} & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \end{bmatrix}$$

SI COSTRUISCE IL VETTORE f IN MODO CHE IL SISTEMA $Ax = f$ ABBIA COME SOLUZIONE $x = [1, 1, \dots, 1]$

TABELLA DEGLI ERRORI $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ AL VARIARE DI $\varepsilon_n \simeq 10^{-6}$

n	GAUSS	PIVOT PARZIALE	PIVOT TOTALE
4	$1.61\ 10^{-5}$	$1.30\ 10^{-5}$	$1.60\ 10^{-6}$
6	$7.84\ 10^{-6}$	$1.83\ 10^{-5}$	$2.09\ 10^{-5}$
8	$4.96\ 10^{-4}$	$3.54\ 10^{-4}$	$1.93\ 10^{-5}$
10	$1.38\ 10^{-2}$	$3.05\ 10^{-4}$	$7.52\ 10^{-5}$
12	$7.84\ 10^{-3}$	$3.08\ 10^{-3}$	$1.07\ 10^{-4}$
14	$7.48\ 10^{-1}$	$3.01\ 10^{-3}$	$8.75\ 10^{-4}$
16	$2.26\ 10^{-1}$	$2.49\ 10^{-2}$	$9.15\ 10^{-4}$

METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI

DATO UN SISTEMA LINEARE $Ax = b$ L'IDEA E' DI COSTRUIRE UNA SUCCESSIONE DI VETTORI $\{x^{(k)}\}$ CHE CONVERGA ALLA SOLUZIONE $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$

COME E' POSSIBILE REALIZZARE CIO'?

ESEMPIO: $n = 3$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

SUPPONENDO $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$ POSSIAMO SCRIVERE

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{cases}$$

QUINDI, PARTENDO DA UN VETTORE ARBITRARIO $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ POSSIAMO GENERARE LA SUCCESSIONE $\{x^{(k)}\}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) \end{cases}$$

I METODI DI JACOBI E DI GAUSS SEIDEL

IN GENERALE, PER UNA MATRICE DI DIMENSIONE n POSSIAMO SCRIVERE

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),\ i = 1, \ldots, n$$

O ANCHE

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),\ i = 1, \ldots, n\,.$$

QUESTO E' IL METODO DI JACOBI.

SE AD OGNI PASSO UTILIZZIAMO LE COMPONENTI DEL VETTORE $x^{(k+1)}$ GIA' AGGIORNATE (presumibilmente piu' precise) OTTENIAMO IL METODO DI GAUSS-SEIDEL

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),\ i = 1, \ldots, n\,.$$

FORMULAZIONE MATRICIALE DI J. E G. S.

DI UNA MATRICE A DI DIMENSIONE n CONSIDERIAMO UNO SPLITTING DEL TIPO

$$A = L + D + U$$

DOVE L ED U SONO IL TRIANGOLO INFERIORE E SUPERIORE DI A E DOVE D E' LA SUA DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

SE RISCRIVIAMO LE FORMULE DI JACOBI

$$\underbrace{a_{ii}}_{elementi\ di\ D} x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{a_{ij}}_{elementi\ di\ L} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{elementi\ di\ U} x_j^{(k)} + b_i,$$

ARRIVIAMO A JACOBI IN FORMA MATRICIALE

$$Dx^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + b \quad \Rightarrow \quad x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b\,.$$

NEL CASO DI GAUSS SEIDEL A PARTIRE DA

$$\underbrace{a_{ii}}_{elementi\ di\ D} x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{a_{ij}}_{elementi\ di\ L} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{elementi\ di\ U} x_j^{(k)} + b_i,$$

ARRIVIAMO A

$$Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b \Rightarrow (D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

OVVERO $x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b.$

FORMULAZIONE MATRICIALE: CASO GENERALE

DI UNA MATRICE A DI DIMENSIONE n CONSIDERIAMO UNO SPLITTING DEL TIPO $A = M - N$. RISULTA

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Rightarrow \; (M - N)x = b \\ & \Rightarrow \; Mx = Nx + b \\ & \Rightarrow \; x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

DA CUI SI OTTIENE IL METODO ITERATIVO

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \text{arbitrario} \end{cases}$$

TEOREMA LA SUCCESSIONE $\{x^{(k)}\}$ CONVERGE ALLA SOLUZIONE SE E SOLO SE LA MATRICE DI ITERAZIONE $M^{-1}N$ E' CONVERGENTE E CIOE', INDICATA CON 0 LA MATRICE NULLA, RISULTA

$$\lim_{k\to\infty} (M^{-1}N)^k = 0\,.$$

DIM: SIA $e^{(k)} = x^{(k)} - x$. OVVIAMENTE $x^{(k)} \to x$ SE E SOLO SE $e^{(k)} \to 0$. POSTO $e^{(0)} = x^{(0)} - x$ RISULTA:

$$\begin{aligned} e^{(k)} & = x^{(k)} - x = M^{-1}Nx^{(k-1)} + M^{-1}b - M^{-1}Nx - M^{-1}b \\ & = M^{-1}Ne^{(k-1)} = (M^{-1}N)^2 e^{(k-2)} = \cdots \underbrace{(M^{-1}N)^k}_{tende\ a\ 0} e^{(0)} \end{aligned}$$

E QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE

$$x^{(k)} \to x \Leftrightarrow (M^{-1}N)^k \to \underbrace{0}_{matricenulla}\,.$$

CONDIZIONI PER LA CONVERGENZA

DI SEGUITO SONO ELENCATE ALCUNE FRA LE CONDIZIONI NECESSARIE e/o SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA DI UN METODO ITERATIVO BASATO SULLO SPLITTING $A = M - N$.

- $(M^{-1}N)$ e' una matrice convergente (NEC. E SUFF.)
- $\rho(M^{-1}N) = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(M^{-1}N)| < 1$ (NEC. E SUFF.)
- $\|(M^{-1}N)\| < 1$ (SUFF.)
- A e' una matrice diagonale dominante in senso forte $|a_{ii}| > \sum_{j=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ (SUFF.)
- Solo per Gauss-Seidel: A e' una matrice simmetrica e definita positiva (SUFF.)

IN GENERALE NON SI PUO' AFFERMARE CHE IL METODO DI GAUSS SEIDEL CONVERGA PIU' VELOCEMENTE DEL METODO DI JACOBI (O VICEVERSA). TUTTAVIA, NEL CASO DI MATRICI TRIDIGONALI IL METODO DI GAUSS SEIDEL CONVERGE SE E SOLO SE CONVERGE IL METODO DI JACOBI E, ASINTOTICAMENTE, SONO NECESSARIE META'ITERAZIONI DI GAUSS SEIDEL PER OTTENERE LA STESSA PRECISIONE DI JACOBI.

CRITERI DI ARRESTO

QUANDO COSTRUIAMO UNA SUCCESSIONE $\{x^{(k)}\}$ TALE CHE $x^{(k)} \rightarrow x$ NELLA PRATICA DOBBIAMO FERMARCI DOPO UN NUMERO FINITO DI PASSI CIOE' SCEGLIERE DEI CRITERI DI ARRESTO.

I PIU' USATI SONO:

- $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon$
- $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq \epsilon$
- $\|r^{(k)}\| = \|Ax^{(k)} - b\| \leq \epsilon$

IL VETTORE $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$ E' DETTO VETTORE RESIDUO ED E' NULLO SE E SOLO SE $x^{(k)}$ E' LA SOLUZIONE ESATTA.

E' IMPORTANTE OSSERVARE CHE UN RESIDUO PICCOLO NON NECESSARIAMENTE IMPLICA VICINANZA ALLA SOLUZIONE (DIPENDE DAL CONDIZIONAMENTO DELLA MATRICE A)

EQUAZIONI NON LINEARI

IL PROBLEMA È DETERMINARE LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE NON LINEARE

$$f(x) = 0 \qquad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

IN GENERALE NON SONO DISPONIBILI FORMULE ESPLICITE PER CALCOLARE LE SOLUZIONI DI $f(x) = 0$.
$\Longrightarrow$
SI RICORRE A TECNICHE CHE CONSENTANO DI APPROSSIMARE LE SOLUZIONI CON UN <u>PRESTABILITO</u> GRADO DI PRECISIONE

N.B. UN CASO PARTICOLARE DI $f(x) = 0$ SONO LE EQUAZIONI ALGEBRICHE

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

ALCUNI ESEMPI DI EQUAZIONI NON LINEARI

$$x + 4\sin(x) = 0, \quad e^x - x^2 = 0, \quad \sqrt{x} - \log(x) = 3$$

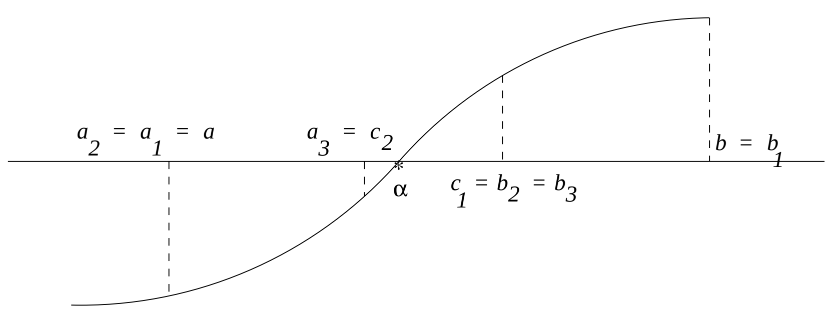
METODO DI BISEZIONE

SUPPONIAMO CHE
1) $f(x)$ CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a, b]$
2) $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE α DI $f(x) = 0$,

$$a < \alpha < b, \quad f(\alpha) = 0$$

IL METODO PIÙ ELEMENTARE PER APPROSSIMARE α È IL METODO DI BISEZIONE
PROCEDE SUDDIVIDENDO AD OGNI PASSO L'INTERVALLO $[a, b]$ A METÀ E DETERMINANDO IN QUALE DEI DUE SOTTOINTERVALLI SI TROVA LA SOLUZIONE, DIMEZZANDO COSI L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO CHE CONTIENE α



- Si pone $a_1 = a,\ b_1 = b$
  Per $i = 1, 2, \ldots,$ NMAX si calcolano

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad \text{e} \quad f(c_i)$$

- Se $f(c_i) \cdot f(a_i) < 0$ si pone $a_{i+1} = a_i;\ b_{i+1} = c_i$
- Se $f(c_i) \cdot f(a_i) > 0$ si pone $a_{i+1} = c_i;\ b_{i+1} = b_i$

- Se $f(c_i) = 0$ e' $\alpha = c_i$

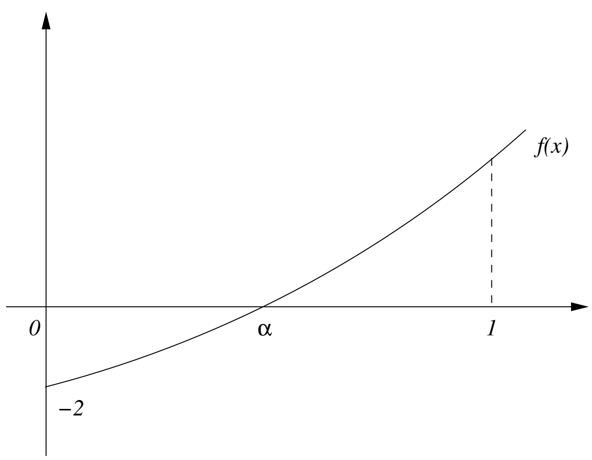
IL PROCEDIMENTO VIENE ARRESTATO SE PER UN INDICE i RISULTA

- $|f(c_i)| \leq \varepsilon$ e/o

- $|b_i - a_i| \leq \varepsilon$

ESEMPIO

$f(x) = x^3 + 4x - 2, \qquad x \in [0, 1]$



$f(0) = -2, \quad f(1) = 3$

$\exists\ \alpha \in (0, 1)\ ;\ f(\alpha) = 0$

APPLICHIAMO IL METODO DI BISEZIONE

i	c_i	$f(c_i)$
1	0.5000	0.1250
2	0.2500	-0.9843
3	0.3750	-0.4472
4	0.4375	-0.1662
6	0.4843	$0.5114\ 10^{-1}$
8	0.4726	$-0.3782\ 10^{-2}$
9	0.4746094	$0.5344\ 10^{-2}$
10	0.4736328	$0.7801\ 10^{-3}$

L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO INIZIALMENTE È <u>1</u> DOPO 10 PASSI È RIDOTTA A 0.00098

AMPIEZZA DELL'INTERVALLO ED ERRORE

DOPO n PASSI ARRIVIAMO ALL'INTERVALLO $[a_n, b_n]$ DI AMPIEZZA

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= (b_{n-1} - a_{n-1})/2 = (b_{n-2} - a_{n-2})/2^2 = \ldots \\ &= \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \end{aligned}$$

SE COME STIMA DI α PRENDIAMO

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

ABBIAMO

$$\begin{aligned} |e_n| &= |\alpha - c_n| \\ |e_n| &\leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

SE PONIAMO $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$ OTTENIAMO n

$$2^{n+1} \geq \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \rightarrow n \geq \log_2(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}) - 1\,.$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL METODO DI BISEZIONE

L'APPROSSIMAZIONE DELLA RADICE È OTTENUTA CALCOLANDO L'INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE ASCISSE DI UNA PARTICOLARE RETTA

LA RETTA È PASSANTE PER I PUNTI

$$(a_i, \operatorname{sgn} f(a_i)),\ \ (b_i, \operatorname{sgn} f(b_i))$$

ES.

$\operatorname{sgn} f(a_i) = -1;\ \operatorname{sgn} f(b_i) = 1$

$$\frac{y+1}{2} = \frac{x-a_i}{b_i-a_i} \Rightarrow y = \frac{2(x-a_i)}{(b_i-a_i)} - 1$$

$$\begin{aligned} y = 0 \ \Rightarrow\ & 2(x-a_i) - b_i + a_i = 0 \\ & 2x = b_i - a_i + 2a_i = b_i + a_i \ \Rightarrow \\ & \ x = \frac{b_i + a_i}{2} \end{aligned}$$

N.B.
L'APPROSSIMAZIONE TIENE CONTO SOLO DEI SEGNI DEI VALORI DELLA FUNZIONE E NON DEI SUOI VALORI

UTILIZZO DELLA FUNZIONE E DELLA DERIVATA

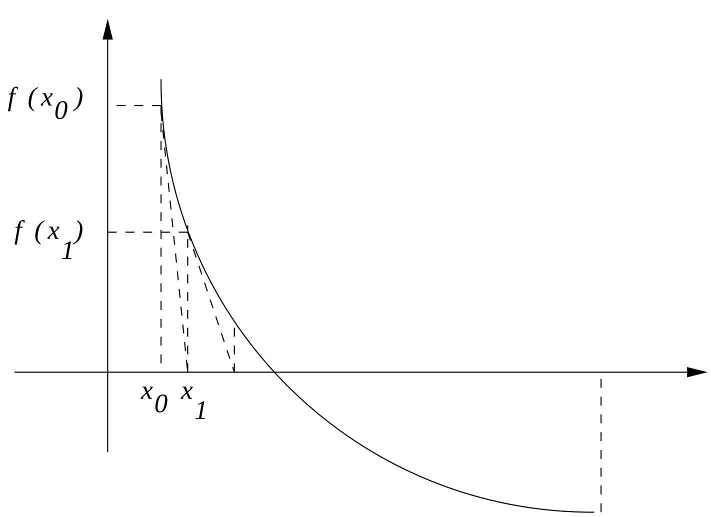
METODO DELLE TANGENTI O DI NEWTON

SI BASA SU RETTE TANGENTI ALLA FUNZIONE f NEI PUNTI $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, \dots$

$$(x_0, f(x_0)),\ f'(x_0) \neq 0 \ ; \quad \begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 &\Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

IN GENERALE

$$(x_i, f(x_i)),\ f'(x_i) \neq 0 \ ; \quad \begin{aligned} y &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \\ y = 0 &\Rightarrow x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ &\Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \end{aligned}$$



CONVERGENZA DEL METODO DI NEWTON

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA DI NEWTON

SIA $f(x)$ DERIVABILE DUE VOLTE IN UN INTORNO DI α
SIA $f'(x)$ DI SEGNO COSTANTE
SIA $f''(x)$ DI SEGNO COSTANTE

x_0 TALE CHE $f(x_0)f''(x_0) > 0$ ALLORA IL METODO DI NEWTON A PARTIRE DA x_0 CONVERGE. (UN TALE x_0 E' DETTO ESTREMO DI FOURIER)

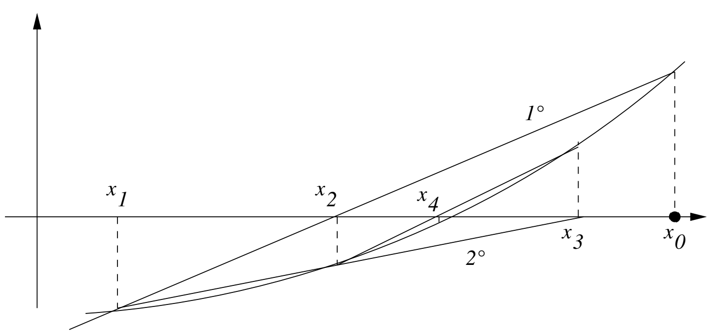
VARIANTI DEL METODO DI NEWTON

E' POSSIBILE RIDURRE IL COSTO DEL METODO DI NEWTON?

NEWTON STAZIONARIO

PONIAMO $f'(x_i) = f'(x_0)\ \forall\ i \qquad x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_0)}$

METODO DELLE SECANTI A PARTIRE DA DUE PUNTI x_0, x_1



x_2 E' LO ZERO DELLA RETTA PASSANTE PER I PUNTI $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \Rightarrow x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

x_3 E' LO ZERO DELLA RETTA PASSANTE PER I PUNTI $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$

IN GENERALE $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

CRITERI DI ARRESTO

I CRITERI DIPENDONO DA UNA TOLLERANZA FISSATA $\varepsilon > 0$ LEGATA ALLA PRECISIONE DI MACCHINA ED ALLA PRECISIONE CON CUI SI VUOLE APPROSSIMARE LA SOLUZIONE

I PIÙ USATI

$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$

$\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} \leq \varepsilon \quad |x_i| \neq 0$

$|f(x_i)| \leq \varepsilon$

$|b_i - a_i| \leq \varepsilon$ PER LA BISEZIONE

ORDINE DI CONVERGENZA

UN METODO HA ORDINE DI CONVERGENZA p SE

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}-\alpha|}{|x_i-\alpha|^p} = \gamma \qquad \gamma \neq 0$$

CIOÈ

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|e_{i+1}|}{|e_i|^p} = \gamma \qquad \gamma \neq 0$$

SE $p = 1$ SI DICE CONVERGENZA LINEARE

SE $p = 2$ QUADRATICA

$\vdots$

ORDINE DI CONVERGENZA DEL METODO DI BISEZIONE

$e_i = x_i - \alpha \qquad e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha$

$|e_i| \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} \quad |e_{i+1}| \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^{i+2}}$

$\dfrac{|e_{i+1}|}{|e_i|} \simeq \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow$ CONVERGENZA AL MASSIMO LINEARE

ORDINE DI CONVERGENZA DEL METODO DI NEWTON

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} f''(\eta)(x - x_i)^2$$

CALCOLIAMO IN $x = \alpha$

$0 = f(\alpha) = f(x_i) + f'(x_i)(\alpha - x_i) + \frac{1}{2} f''(\eta)(\alpha - x_i)^2$

DIVIDIAMO PER $f'(x_i) \neq 0$

$$0 = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + (\alpha - x_i) + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)}(\alpha - x_i)^2$$

$$\alpha - x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)}(\alpha - x_i)^2 = 0$$

$$\alpha - \underbrace{(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)})}_{x_{i+1}} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)}(\alpha - x_i)^2$$

$$\alpha - x_{i+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)} e_i^2$$

$$e_{i+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)} e_i^2$$

$$\frac{|e_{i+1}|}{|e_i|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_i)} \Rightarrow p = 2$$

CONVERGENZA ALMENO QUADRATICA.

APPROSSIMAZIONE

QUESTO PROBLEMA SI PONE QUANDO

- CONOSCIAMO UNA GRANDEZZA SOLO ATTRAVERSO UN INSIEME DISCRETO DEI SUOI VALORI
- ABBIAMO A CHE FARE CON UNA FUNZIONE MOLTO COMPLICATA

LA COSTRUZIONE DI UNA FUNZIONE A PARTIRE DA UNA TABELLA DI DATI VIENE AFFRONTATA SECONDA DUE APPROCCI

- DATI AFFETTI DA UN SENSIBILE ERRORE
  I DATI VENGONO APPROSSIMATI NEL LORO INSIEME
  $\Rightarrow$ **migliore approssimazione**
- DATI ESATTI
  SI CERCA UNA FUNZIONE CHE PASSA PER I PUNTI
  $\Rightarrow$ **interpolazione**

CLASSI DI FUNZIONI PIÙ USATE PER APPROSSIMARE ED INTERPPLARE

- POLINOMI
- FUNZIONI RAZIONALI
- FUNZIONI TRIGONOMETRICHE
- FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI
  (FUNZIONI SPLINES)

MIGLIORE APPROSSIMAZIONE

DATI $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n$ AFFETTI DA ERRORE

SI CERCA UNA FUNZIONE APPROSSIMANTE CHE SI ADATTI ALL'ANDAMENTO DEI DATI $\Rightarrow$ ABBIAMO ANCHE BISOGNO DI UN CRITERIO CHE PERMETTA DI QUANTIFICARE LA BONTA' DELL'APPROSSIMAZIONE:

SE SI APPROSSIMANO I DATI CON UNA RETTA

approssimazione lineare

SE SI APPROSSIMARNO I DATI CON UN POLINOMIO DI GRADO $m > 1$

approssimazione polinomiale di grado $m > 1$

CRITERI DI VALUTAZIONE DELLA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE

SI LAVORA SUL VETTORE ERRORE (nel caso della retta)

$$E_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i) \quad i = 1, \ldots, n$$

OPPURE (nel caso di un polinomio di grado m)

$$E_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m) \quad i = 1, \ldots, n$$

PER DETERMINARE LA RETTA O IL POLINOMIO CHE MEGLIO APPROSSIMA I DATI SI DETERMINA LA RETTA O IL POLINOMIO CHE MINIMIZZA LA DISTANZA DELL' APPROSSIMANTE DAI DATI (esistono varie distanze in $\mathbb{R}^n$)

1^0 CRITERIO (errore in norma 1)

$$\min_{a_0,a_1} \sum_{i=1}^{n} |E_i| \qquad \min_{a_0,a_1,\ldots,a_m} \sum_{i=1}^{n} |E_i| \qquad (\|E\|_1)$$

2^0 CRITERIO (errore in norma infinito)

$$\min_{a_0,a_1} \max |E_i| \qquad \min_{a_0,a_1,\ldots,a_m} \max |E_i| \qquad (\|E\|_\infty)$$

3^0 CRITERIO (errore in norma 2)

$$\min_{a_0,a_1} \sum_{i=1}^{n} |E_i|^2 \qquad \min_{a_0,a_1,\ldots,a_m} \sum_{i=1}^{n} |E_i|^2 \qquad (\|E\|_2^2)$$

IL POLINOMIO DI MIGLIORE APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI E' QUEL POLINOMIO CHE MINIMIZZA L'ERRORE IN NORMA 2.

RETTA DI MIGLIORE APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

SI TRATTA DI MINIMIZZARE

$$\min_{a_0,a_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = \min_{a_0,a_1} S(a_0, a_1)$$

DERIVANDO RISPETTO A a_0 E RISPETTO A a_1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} &= -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} &= -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i \end{cases}$$

UGUAGLIANDO A ZERO

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i &= 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 &= 0 \end{cases}$$

OVVERO

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

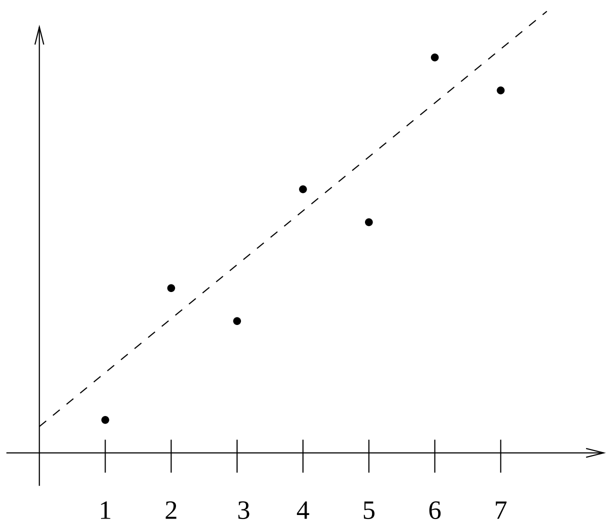
EQUAZIONI NORMALI

$$\begin{cases} \displaystyle n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

MATRICE DEI COEFF.
SIMMETRICA E
DEF. POSITIVA

ESEMPIO

ASSEGNATI I DATI



x_i	y_i
1	0.5
2	2.5
3	2.0
4	4.0
5	3.5
6	6.0
7	5.5

CONSIDERIAMO LE EQUAZIONI NORMALI CON $n = 7$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 7a_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{7} a_1 x_i & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{7} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{7} a_0 x_i + \displaystyle\sum_{i=1}^{7} a_1 x_i^2 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{7} y_i x_i \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{7} x_i & = & 28 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{7} y_i & = & 24 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{7} x_i^2 & = & 140 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{7} y_i x_i & = & 119.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 7a_0 + 28a_1 = 24 \\ 28a_0 + 140a_1 = 119.5 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_0 = 0.071428 \\ a_1 = 0.839286 \end{array} \end{array}$$

POLINOMIO DI MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI GRADO $m > 1$

$$\min_{a_0,a_1,\dots,a_m} \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m)^2$$

$$\min_{a_0,a_1,\dots,a_m} S(a_0, a_1, \dots, a_m)$$

ANALOGAMENTE AL CASO DELLA RETTA

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \quad -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_mx_i^m) \cdot x_i = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \quad -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i - \dots - a_mx_i^m) \cdot x_i^m = 0$$

$\Rightarrow$ OTTENIAMO IL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_i + a_2\sum x_i^2 + \dots + a_m\sum x_i^m & = & \sum y_i \\ a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 + a_2\sum x_i^3 + \dots + a_m\sum x_i^{m+1} & = & \sum y_ix_i \\ \vdots \\ a_0\sum x_i^m + a_1\sum x_i^{m+1} + a_2\sum x_i^{m+2} + \dots + a_m\sum x_i^{2m} & = & \sum y_ix_i^m \end{cases}$$

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI È SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA E QUINDI IL PROBLEMA AMMETTE UNA UNICA SOLUZIONE.

INTERPOLAZIONE

DATI $\quad (x_i, y_i) \quad i = 0, \ldots, n \quad x_i \in [a, b]$

(x_i SONO CHIAMATI PUNTI FONDAMENTALI DELL'INTERPOLAZIONE E SONO ASSUNTI DISTINTI $x_i \neq x_j$ $i \neq j$)

ED UN INSIEME DI FUNZIONI $\phi_j(x)$, $j = 0, \ldots, n$
DEFINITE IN $[a, b]$ E LINEARMENTE INDIPENDENTI

SI TRATTA DI DETERMINARE

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \phi_j(x)$$

TALE CHE

$$g(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \phi_j(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$$

N.B.
LA SCELTA DELLA CLASSE DELLE FUNZIONI $\phi_j(x)$ DIPENDE DALLE APPLICAZIONI ED E' MOLTO IMPORTANTE

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

SE SI SCEGLIE DI UTILIZZARE POLINOMI ALLORA

$$\phi_j(x) = x^j \quad j = 0, \ldots, n$$

$\Rightarrow$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$$

$\Rightarrow$ SI TRATTA DI DETERMINARE UN POLINOMIO DI GRADO AL MASSIMO n TALE CHE

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_i^j = y_i \quad i = 0, \ldots, n$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \cdots + \alpha_n x_0^n &= y_0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_1^n &= y_1 \\ \vdots & \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_n x_n^n &= y_n \end{cases}$$

IL PROBLEMA CONSISTE QUINDI NEL RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE NELLE INCOGNITE α_0 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

ESISTENZA ED UNICITÀ DEL POLINOMIO INTERPOLANTE

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \qquad \text{matrice di Vandermonde}$$

RISULTA ESSERE NON SINGOLARE SE E SOLO SE $x_i \neq x_j,\ i \neq j$ ESSENDO

$$\det(A) = \prod_{i,j=0,\ i>j}^{n} (x_i - x_j)$$

POSSIAMO ALLORA AFFERMARE

TEOREMA ESISTE UN UNICO POLINOMIO DI GRADO MASSIMO n CHE ASSUME VALORI $y_i,\ i = 0, \dots, n$ IN CORRISPONDENZA DI $(n+1)$ <u>PUNTI DISTINTI</u> $x_i,\ i = 0, \dots, n$

PROBLEMI DI A

- MAL CONDIZIONAMENTO
- PUNTI “QUASI COINCIDENTI” (aritmetica finita)

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI VOLER INTERPOLARE I DATI

$$(-1,2) \quad (1,1) \quad (2,1)$$

CERCHIAMO UN POLINOMIO DEL TIPO

$$P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

IMPONENDO LE CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE OTTENIAMO

$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 & = \ 2 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & = \ 1 \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 & = \ 1 \end{cases}$$

$\det(A) = 6 \neq 0$

SVOLGENDO I CALCOLI OTTENIAMO

$$\Rightarrow \ P_2(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$$

FORMULAZIONE DI LAGRANGE DEL POLINOMIO INTERPOLANTE

ASSEGNATI $(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, n$ SI DEFINISCONO LE BASI DI LAGRANGE $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ TALI CHE

$l_j(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO n E

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j$$

È IL POLINOMIO DI GRADO n INTERPOLANTE I DATI

INFATTI

$$\begin{aligned} P_n(x_i) &= \sum_{j=0}^{n} l_j(x_i) y_j = l_0(x_i) y_0 + l_1(x_i) y_1 + \cdots + \\ &+ l_i(x_i) y_i + \cdots + l_n(x_i) y_n \Rightarrow \\ P_n(x_i) &= y_i \end{aligned}$$

BASI DI LAGRANGE $l_j(x)$

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

CIOE'

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i=0,\ i \neq j}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0,\ i \neq j}^{n} (x_j - x_i)}$$

ESEMPIO

ASSEGNATI I PUNTI $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$ $(x_2, y_2) = (2, 1)$

COSTRUIAMO IL POLINOMIO

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} l_j(x) y_j$$

$$l_0(x) = \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \tfrac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \tfrac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x+1)(x-1)$$

IN CONCLUSIONE:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{6}(x-1)(x-2)2 - \frac{1}{2}(x+1)(x-2)1 + \frac{1}{3}(x+1)(x-1)1 \\ &= \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

N.B.
UNICITÀ DEL POLINOMIO INTERPOLANTE

FORMULAZIONE DI NEWTON DEL POLINOMIO INTERPOLANTE

E' UNA FORMULAZIONE BASATA SU DI UNA NUOVA BASE

ESEMPIO: ASSEGNATI (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$\begin{array}{ll} \text{BASE}_P & (1, x, x^2) \\ \text{BASE}_L & (l_0(x), l_1(x), l_2(x)) \\ \text{BASE}_N & \{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1)\} \end{array}$$

$P_2(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1)$

IMPONIAMO L'INTERPOLAZIONE

$$\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{array} \qquad \begin{cases} A_0 = y_0 \\ A_0 + A_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \end{cases}$$

$A_0 = y_0$

$$A_1 = \frac{y_1 - A_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$A_2 = \frac{y_2 - A_0 - A_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{y_2 - y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} \\
&= (\text{CON QUALCHE CONTO } (+y_1 x_1 - y_1 x_1)) \ldots \\
&= \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\downarrow & \searrow \\
\bar{A}_1 & A_1
\end{array}
$$

"SIMILE AD A_1"

DIFFERENZE DIVISE

DATI $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ SI DEFINISCE LA DIFFERENZA DIVISA (DD) DI f SUI NODI $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ RICORSIVAMENTE COME SEGUE

DD DI ORDINE 0 RELATIVA A x_i

$$\cdot\ f[x_i] = f(x_i)$$

DD DI ORDINE 1 RELATIVA A x_i, x_{i+1}

$$\cdot\ f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

DD DI ORDINE 2 RELATIVA A x_i, x_{i+1}, x_{i+2}

$$\cdot\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+1} - x_i}$$

DD DI ORDINE n RELATIVA A $x_0, \dots, x_n$

$$\cdot\ f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

N.B. $f[x_0, \dots, x_n]$ È INVARIANTE RISPETTO A PERMUTAZIONE DEGLI ARGOMENTI E PUO' ESSERE PENSATA COME UN'APPROSSIMAZIONE DELLA DERIVATA DI ORDINE n.

N.B.

$A_0 = y_0$ DD DI ORDINE 0
RELATIVA A x_0

$A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ DD DI ORDINE 1
RELATIVA A x_0, x_1

$\bar{A}_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ DD DI ORDINE 1
RELATIVA A x_1, x_2

$A_2 = \dfrac{1}{x_2 - x_0}\left[\bar{A}_1 - A_1\right]$ DD DI ORDINE 2
RELATIVA A x_0, x_1, x_2

ORGANIZZAZIONE IN TABELLA DELLE DD

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & y_i & f[x_i] & f[x_i, x_{i+1}] & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\
x_0 & y_0 & y_0 & & \\
 & & & f[x_0, x_1] = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & \\
x_1 & y_1 & y_1 & & \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 & & & f[x_1, x_2] = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \\
x_2 & y_2 & y_2 & &
\end{array}
$$

ES.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_i & y_i & f[\ \ ] & f[\ \ ,\ \ ] & f[\ \ ,\ \ ,\ \ ] \\
\hline
-2 & 2 & 2 & & \\
 & & & \dfrac{3-2}{-1+2} = 1 & \\
-1 & 3 & 3 & & \dfrac{-2-1}{0+2} = -\dfrac{3}{2} \\
 & & & \dfrac{1-3}{0+1} = -2 & \\
0 & 1 & 1 & &
\end{array}
$$

FORMULAZIONE DI NEWTON DEL POLINOMIO INTERPOLANTE

ASSEGNATI (x_i, y_i) $i = 0, \ldots, n$

$n = 2$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) \\
P_2(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
P_n(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
&+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j \omega_j(x)$$

A_j DD DI ORDINE j SUI NODI $x_0, \ldots, x_j$

$\omega_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})$ $j > 0$

$\omega_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1$

N.B.

$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$

$\Rightarrow$ POSSIAMO AGGIUNGERE PUNTI E SFRUTTARE I CONTI GIÀ FATTI

ESEMPIO

DATI $\quad (-1,2),\ (1,1),\ (2,1)$

$$P_2(x) = y_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

x_i	$y_i = f[\ ]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$
-1	2		
		$\frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$	
1	1		$\frac{0+\frac{1}{2}}{2+1} = \frac{1}{6}$
		$\frac{1-1}{2-1} = 0$	
2	1		

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2 + (x+1)(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}(x-1)(x+1) \\ &= \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

N.B.

RICORDIAMOCI L' UNICITÁ DEL POLINOMIO INTERPOLANTE

ESEMPIO

DATI $\quad (-1,1),\ (1,3),\ (2,4)$

$$P_2(x) = y_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

x_i	$y_i = f[\ ]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$
-1	1		
		$\dfrac{3-1}{1+1} = 1$	
1	3		$\dfrac{1-1}{2+1} = 0$
		$\dfrac{4-3}{2-1} = 1$	
2	4		

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + (x+1)\cdot 1 + (x+1)(x-1)\cdot 0 \\ &= 1 + x + 1 = x + 2 \end{aligned}$$

ERRORE NELL'INTERPOLAZIONE

SI TRATTA DI STIMARE L'ERRORE COMMESSO NELL'APPROSSIMAZIONE CON IL POLINOMIO INTERPOLANTE FUORI DAI PUNTI FONDAMENTALI.

$(x_1, y_i) = (x_i, f(x_i))\ i = 0, \ldots, n$

$E_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) \quad \bar{x} \neq x_i\ \forall\ i$

1^0 FORMULAZIONE

$f \in C^{n+1}[a, b] \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$E_n(\bar{x}) = \frac{\omega_{n+1}(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\omega_{n+1}(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)$$

$$\xi \in]a, b[$$

$$|E_n(\bar{x})| \leq \frac{(b-a)^{n+1} M}{(n+1)!} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

2^0 FORMULAZIONE

$f(x) \notin C^{n+1}[a,b]$

$f(x)$ NOTA SOLO PER PUNTI

$(x_i, f(x_i)),\ i = 0, \ldots, n$ SIA $P_n(x)$ IL POLINOMIO INTERPOLANTE. AGGIUNGIAMO $(\bar{x}, f(\bar{x})) \Rightarrow$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$$

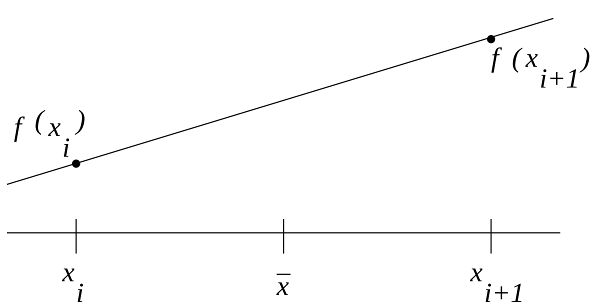
$$f(\bar{x}) = P_{n+1}(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + (\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\cdots(\bar{x}-x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$$

$$E_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = (\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\cdots(\bar{x}-x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$$

N.B.
NEL CALCOLO DI $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$ C'È BISOGNO DI APPROSSIMARE $f(\bar{x})$

UNA POSSIBILITA' E' QUELLA DI UTILIZZARE L' INTERPOLAZIONE LINEARE

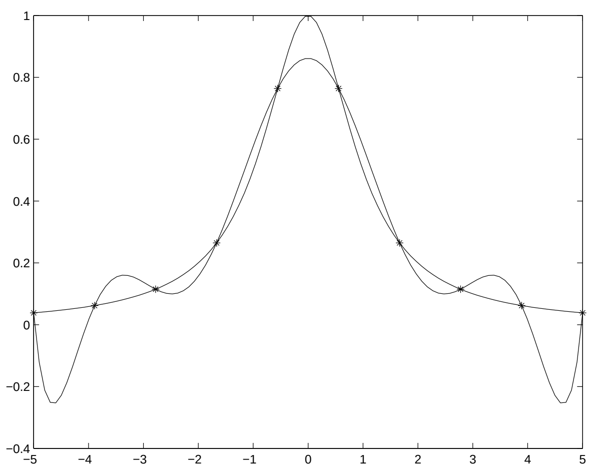
SE $\bar{x} \in [x_i, x_{i+1}]$

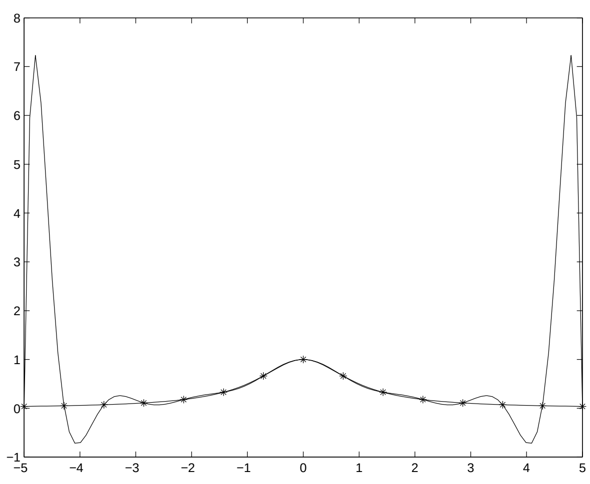


$f(\bar{x})$ PUÓ ESSERE APPROSSIMATO CON IL VALORE DELLA RETTA PASSANTE PER $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

ESEMPIO FUNZIONE DI RUNGE

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ E COSTRUIAMO IL POLINOMIO INTERPOLANTE SU 10 E SU 15 PUNTI EQUIDISTANTI IN $[-1, 1]$. I RISULTATI SONO RAPPPRESENTATI NELLE SEGUENTI FIGURE





POSSIAMO CONCLUDERE CHE IL COMPORTAMENTO DEL POLINOMIO INTERPOLANTE "PEGGIORA". E' STATO DIMOSTRATO CHE

$$\text{PER } n \to \infty \qquad P_n(x) \text{ DIVERGE} \qquad 0.726 \le |x| < 1$$

ESEMPIO FUNZIONE DI RUNGE

PER QUESTA PARTICOLARE FUNZIONE

- LE DERIVATE DI f CRESCONO RAPIDAMENTE ALL'AUMENTARE DI n
- SE I NODI NON VENGONO PRESI EQUIDISTANTI, MA PIÙ ADDENSATI AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO PER LA FUNZIONE DI RUNGE SI OTTIENE UN BUON RISULTATO MA QUESTO TRUCCO NON VALE IN GENERALE

UN'ALTERNATIVA GENERALE ALL'UTILIZZO DI POLINOMI DI GRADO ELEVATO E' RAPPRESENTATA DALLE FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI

ES. INTEROPOLAZIONIE A TRATTI LINEARE