Lezione 10: Il Determinante

Abbiamo notato nell'esempio della lezione precedente come può essere macchinoso studiare la compatibilità di un sistema al variare di un parametro utilizzando la riduzione di Gauss. Infatti per determinare i possibili valori del rango di una matrice in cui compare un parametro è necessario esaminare i valori del parametro in modo da essere sicuri di volta in volta che la matrice trovata sia in forma ridotta. C'è un altro strumento che può essere usato per determinare il rango di una matrice quadrata: **il determinante**.

Torniamo all'osservazione che il rango di una matrice è il numero di colonne (o righe) linearmente indipendenti che essa contiene. Consideriamo una matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Qui il rango può essere 0, 1 o 2. Ovviamente il rango è zero solo se sono tutti nulli gli elementi della matrice.

E' facile vedere che il rango è 2 se e soltanto se i vettori $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Infatti se fossero linearmente dipendenti (cioè proporzionali),

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} ,$$

si avrebbe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{b}R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} \lambda b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango sarebbe 1. Ovviamente per poter fare la riduzione che abbiamo appena fatto (e quindi moltiplicare una riga per $\frac{d}{b}$) dobbiamo supporre ch e sia d sia b siano diversi da zero. Nel caso in cui d e/o b sono zero l'analisi è molto più semplice...(e la tralasciamo), ma la conclusione di questo discorso varrà in generale.

Il viceversa (cioè che se ha rango 1 allora i due vettori sono linearmente dipendenti) è altrettanto facile da verificare.

Scriviamo in un altro modo cosa significa che due vettori sono linearmente dipendenti. Se

$$\begin{cases} a = \lambda b \\ c = \lambda d \end{cases}$$

moltiplicando la prima equazione per d e usando la seconda equazione si ha

$$ad = \lambda bd = bc \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - cb = 0 .$$

Quindi la conclusione è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ha rango 2 (rango massimo)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - cb \neq 0 .$$

Questo numero $ad - cb$ lo chiamiamo il **determinante** della matrice A. Il simbolo $\det A$ o la matrice con le barre piuttosto che con le parentesi rappresentano due modi alternativi di denotare il determinante di A

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb\,.$$

Esempio 74 1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1\,;$$

2. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6\,;$$

3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0\,.$$

In questo esempio la prima e la seconda hanno determinante non nullo e quindi hanno rango 2 (le loro colonne sono vettori linearmente indipendenti), mentre la terza ha determinante nullo e quindi ha rango 1.

Finora abbiamo definito il determinante di una matrice 2×2, cioè un operazione che a ogni matrice 2×2 associa un numero reale e abbiamo visto come questa nozione sia legata alla nozione di rango e di lineare indipendenza. Vedremo come questa operazione si può definire (a partire dal caso delle matrici 2×2) per tutte le matrici 3×3, e da queste alle matrici 4×4 e così via....per tutte le matrici quadrate. E come anche nel caso generale questa operazione ci dia informazioni sul rango.

Come dicevo, l'idea è definire il determinante per le matrici $n \times n$ riconducendolo a quello delle matrici $(n-1) \times (n-1)$.

Per fare questo abbiamo bisogno di qualche definizione: data una matrice A, $n \times n$, denotiamo con M_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta dalla matrice A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna (un **minore di ordine** $n-1$).

Esempio 75 Se prendiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

allora la matrice M_{23} si ottiene cancellando da A la seconda riga e la terza colonna e quindi

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Ora vogliamo definire il determinante di una matrice A $n \times n$ supponendo di saper già calcolare il determinante delle matrici $(n-1)\times(n-1)$. Chiameremo **complemento algebrico** di un elemento a_{ij} il numero A_{ij} dato da

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

ossia il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, cambiato di segno se la somma degli indici (i e j) è dispari ($(-1)^{i+j}$ è un modo "compatto" di dire questo - ci ricordiamo, ovviamente, che -1 elevato a un numero pari fa 1, mentre elevato a un numero dispari rimane -1).

Nell'esempio di sopra si ha $\det M_{23} = -3 - 4 = -7$ e quindi $A_{23} = 7$ (abbiamo cambiato il segno perchè "il posto" 2 3 è dispari, nel senso che $2 + 3 = 5$ è dispari).

Siamo pronti per la definizione del deteminante di una matrice $n\times$.

Definizione 76 *Se A è una matrice quadrata il suo* **determinante** *è quel numero che si ottiene sommando gli elementi di una riga (o di una colonna) moltiplicati per il loro complemento algebrico.*

Prima di spaventarci, mettiamo subito in pratica questa definizione con una matrice 3×3. Possiamo, per esempio, calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sviluppiamolo per esempio usando la prima riga

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(12 + 2) - 3(-1 - 8) = 42 + 27 = 69 . \end{aligned}$$

Notate che è implicito nella definizione il fatto (che stiamo dando per buono) che per calcolare il determinante si possa usare una qualsiasi riga o una qualsiasi colonna (ottenendo sempre lo stesso risultato, ovviamente!). Per esempio il determinante che abbiamo appena calcolato poteva essere calcolato anche sviluppandolo rispetto alla seconda colonna, ottenendo

$$\begin{aligned} \det A &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4(9 + 6) + (6 + 3) = 60 + 9 = 69 . \end{aligned}$$

Meno male! Viene lo stesso risultato.

È quindi chiaro che di volta in volta sceglieremo per calcolare il determinante, la riga o la colonna più conveniente, per esempio quella con il maggior numero di zeri.

Osservazione: Segue subito dalla definizione che il determinante di una matrice che ha una riga (o una colonna) di zeri è sempre uguale a zero (basta svilupparlo rispetto a quella riga o a quella colonna).

Come si diceva all'inizio, abbiamo ricondotto il calcolo del determinante di una matrice 3×3 al calcolo di 3 determinanti di matrici 2×2. E così per quelle di ordine superiore...

Per quanto riguarda il calcolo del determinante di matrici 3×3 (e **solo per queste**) vale la seguente *regola di Sarrus* che è decritta dal seguente diagramma

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ \begin{matrix} - & - & - \end{matrix} \end{array}$$

ATTENZIONE

Solo per le matrici 3×3 !!!

ossia si ripetono, a destra della matrice, le prime due colonne. Della tabella così ottenuta si sommano i prodotti degli elementi di ognuna delle tre diagonali discendenti e quindi si sottraggono i prodotti degli elementi di ognuna delle tre diagonali ascendenti, il risultato così ottenuto coincide con il determinante della matrice A di ordine 3. Provatelo con la matrice 3×3 dell'esempio precedente. Vedrete che se non sbagliate i conti anche così vi viene 69.

Usando il determinante si può dare una definizione alternativa di rango.

Definizione 77 *Chiameremo* **sottomatrice** *di una matrice data A una matrice ottenuta da A cancellando alcune righe e/o alcune colonne e chiameremo* **minore** *della matrice A una sua sottomatrice quadrata.*

Esempio 78 Se A è la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

è la una sua sottomatrice (ottenuta cancellando la seconda riga), mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la sottomatrice quadrata (ossia un minore) ottenuta cancellando la terza colonna.

Definizione 79 *Data una qualsiasi matrice A, $m \times n$ (ossia con m righe e n colonne), il* **rango** *di A è l'ordine del più grande minore (ossia del minore di ordine più grande) con determinante diverso da zero.*

Se volessimo quindi determinare il rango della matrice dell'esempio precedente bisognerebbe calcolare il determinante dei minori più grandi che essa contiene, in questo caso quelli di ordine 3 (essendo la matrice 4×3). Proviamo a calcolare il determinante del minore ottenuto, nell'esempio, cancellando la terza colonna. Si ha (e si verifica facilmente) che

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ma questo non basta per concludere che il rango sia inferiore a 3. Se calcoliamo infatti il determinante del minore ottenuto cancellando la prima colonna otteniamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Questo basta per dedurre che il rango è 3 (ossia al primo minore a determinante non nullo che si trova, ci si può fermare e quello determina il rango). Se invece avessimo trovato che anche questo aveva determinante nullo e così anche gli altri minori di ordine 3, avremmo concluso che il rango era minore di 3.

Per esempio data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si verifica che tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo (fatelo per esercizio). Quindi per decidere se il rango sia 2 o 1, dobbiamo analizzare i minori di ordine 2. Se ne troviamo almeno uno a determinante diverso da zero possiamo concludere che il rango è 2. Per esempio il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ottenuto cancellando la terza colonna e la terza e la quarta riga, ha determinante non nullo. Quindi il rango è 2.

Per cercare di convincerci che questa nozione di rango (definita facendo uso del determinante) è coerente con quella data all'inizio attraverso il metodo di riduzione di Gauss, facciamo un paio di esempi istruttivi:

Esempio 80 Prendiamo una speciale matrice ridotta della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & 79 \\ 0 & 0 & 3 & 115 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matrici di questa forma (cioè quadrate con gli elementi sotto la diagonale tutti nulli e gli elementi della diagonale non nulli) si chiamano **matrici triangolari**. E ora calcoliamo il determinate di questa matrice usando la definizione. Evidentemente la cosa più conveniente è svilupparlo usando la prima colonna (in cui ci sono quasi tutti zeri)

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 79 \\ 0 & 3 & 115 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare questo determinante 3×3 che, ancora una volta, ci conviene sviluppare lungo la prima colonna e quindi

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 115 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42\,.$$

Quindi il determinante è semplicemente dato dal prodotto di tutti gli elementi della diagonale. Ovviamente questo è vero per qualsiasi matrice triangolare (non importa di che ordine sia).

Esempio 81 Ora prendiamo una matrice ridotta. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 11 & 32 & 5 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 4 & 91 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evidentemente il rango (definito attraverso la riduzione) di questa matrice 5×6 è 3 (uguale al numero di righe non nulle).

Supponiamo però di non aver dato questa definizione di rango che fa uso della riduzione e di dover usare il determinante dei minori per calcolarlo. Ci accorgiamo subito che tutti i minori 5×5 della matrice A hanno due righe nulle e quindi (come abbiamo già osservato) hanno determinante nullo. Allora passiamo ai minori di ordine 4. Anche in questo caso si vede facilmente che tutti hanno almeno una riga nulla e quindi anch'essi hanno determinante nullo. Evidentemente questo ci basta per dire che in rango deve essere minore o uguale a 3. Potremmo concludere che il rango è 3 se trovassimo un minore di ordine 3 con determinante non nullo...e questo c'è. Basta infatti cancellare la terza, la quinta e la sesta colonna e le ultime due righe per ottenere la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

che è triangolare e quindi il suo determinante è uguale a $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$, quindi diverso da zero.

Conclusione: Le due nozioni di rango evidentemente coincidono sulle matrici ridotte.

Questa conclusione **è vera per tutte le matrici** e per convincercene anche se in modo non troppo rigoroso, vi faccio notare che il determinante verifica le seguenti due proprietà:

1. Il **determinante non cambia** se a una riga (o colonna) si somma un'altra riga (o colonna) moltiplicata per uno scalare non nullo;

2. Se si scambiamo due righe il determinante **cambia segno**.

Esempio 82 Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

per esempio sviluppandola lungo la prima colonna

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 4 - 9 = -12\,.$$

Ora proviamo a ridurre la matrice usando le operazioni 1) e 2). Sommando alla seconda riga la prima si ha che A è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi scambiando la seconda con la terza riga si ottiene la matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ora questa è anche una matrice triangolare e quindi il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale, cioè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12!$$

Bene! Come deve essere. Viene lo stesso valore, cambiato di segno perchè nel ridurla abbiamo scambiato l'ordine di due righe.

Se ci pensiamo in realtà bastano le due operazioni descritte qui sopra per ridurre una matrice e questo ci dice che effettiavamente l'esempio visto sopra (il calcolo del rango di una matrice ridotta con l'uso del determinante) è significativo in generale.

Notate inoltre che la proprietà di invarianza 1) è molto utile per semplificare il calcolo del determinante.

Esempio 83 Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Piuttosto che applicare direttamente a questa matrice il calcolo del determinante osserviamo che se sommo la terza riga moltiplicata per 2 alla prima riga la matrice si semplifica molto. Quindi

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

ci è basta una sola operazione per rendere il calcolo del determinante molto facile!

Per concludere vediamo come il determinante è utile nel caso in cui si debba discutere il comportamento di un sistema (e quindi della sua matrice associata) al variare di un parametro.

Esercizio 84 Dire per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni non banali

$$\begin{cases} -3x + ky + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2kx + y + 4kz = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento (un po' prolisso): Sappiamo che un sistema omogeneo non ha mai il problema di essere compatibile, infatti ha sempre almeno la soluzione nulla (quella banale appunto). Qui la richiesta è: per quali valori di k questo sistema invece di avere una sola soluzione, ne ha infinite? Il Teorema di Rouchè-Capelli ci dice che un sistema compatibile ha infinite soluzione se il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle incognite. In questo caso le incognite sono 3 a la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -3 & k & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2k & 1 & 4k \end{pmatrix}$$

è una matrice 3×3. È chiaro che le diverse matrici che noi otteniamo se scegliamo diversi valori del parametro k potranno avere ranghi diversi. Noi stiamo cercando quei valori di k per cui la matrice corrispondente abbia rango minore di 3.

Per quello che abbiamo visto finora (la definizione di rango tramite il determinante dei minori) è chiaro che una matrice quadrata non ha rango massimo se il suo determinante è nullo. Allora in questo caso basta cercare i valori di k per cui il determinante della matrice dei coefficienti viene uguale a zero. Calcoliamo il determinante (usando per esempio la prima colonna), imponiamogli di essere zero e vediamo che condizione questo ci dà su k:

$$\det A = -3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4k \end{vmatrix} + 2k \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(-4k+2) + 2k(-2k+1) = -4k^2 + 14k - 6\,,$$

quindi il determinante sarà nullo per i valor di k per cui $-4k^2 + 14k - 6 = 0$. Questa è una semplice equazione di secondo grado che voi sapere risolvere (vero?). Applicando la formula di risoluzione (è consigliabile prima dividere tutta l'equazione per 2), si ottiene che i due valori di k che cerchiamo sono 1 e 6. In conclusione per $k = 1$ e per $k = 6$ il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, quindi il rango è minore di 3 e quindi il sistema omogeneo corrispondente ha infinite soluzioni.