Ingegneria Informatica e delle Telecomunicazioni

Anno accademico 2004-2005. Docente Costanza Conti

Raccolta di compiti degli appelli precedenti

Nota: Gli esercizi riportati si riferiscono a compiti dei precendeti anni accademici.Pertanto, si raccomanda di consultare il programma perche' gli argomenti di ogni anno accademico possono essere leggermenti variati.

Siano assegnati i numeri reali $a = \frac{3}{4}10^{-4},\ b = \frac{1}{3},\ c = \frac{5}{4}10^{-4}$ e siano $\tilde{a}, \tilde{b}$ e $\tilde{c}$ i loro floatings su un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per troncamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Si esegua la somma $\tilde{s} = \tilde{a} \oplus \tilde{b} \oplus \tilde{c}$ scegliendo opportunamente l'ordine e si calcoli $\frac{\tilde{s}-s}{s}$ dove $s = a + b + c$.

Si definisca la precisione di macchina e si calcoli quella dell'elaboratore di cui sopra.

Sia assegnato il numero reale $a = \frac{4}{3}$ e sia $\tilde{a}$ il floating di tale numero su un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 2 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per troncamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Sia inoltre $\hat{a}$ il floating di a su un secondo elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa che opera per troncamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Si confrontino gli errori relativi $\frac{\tilde{a}-a}{a}$, $\frac{\hat{a}-a}{a}$ fra di loro e con la precisione di macchina degli elaboratori di cui sopra.

Si presenti un possibile algoritmo per la determinazione della precisione di macchina di un elaboratore caratterizzato da m cifre per la rappresentazione della mantissa e dalla base β.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}10^{-3} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{6}{5}10^{2} \end{pmatrix}$$

se ne determini il suo floating su un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Se ne calcoli quindi, con le regole dell'aritmetica finita, la norma infinito.

Sia assegnato il numero reale $a = \frac{5}{4}$ e sia $\tilde{a}$ il floating di tale numero su un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica. Sia quindi $\hat{a}$ il floating di a su un secondo elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 2 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Si confrontino quindi gli errori relativi $\frac{\tilde{a}-a}{a}$, $\frac{\hat{a}-a}{a}$ fra di loro e con la precisione di macchina degli elaboratore di cui sopra.

Si presenti sinteticamente il concetto di precisione di macchina ed un possibile algoritmo per la sua determinazione

Siano assegnati i numeri reali $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{4}{3}$. Supponendo di operare con un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica) siano $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ il floating di a e di b. Si esegua la somma dei numeri $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ e si stimi l'errore relativo $\frac{(\tilde{a} \oplus \tilde{b})-(a+b)}{a+b}$. Sia inoltre $\hat{a}$ il floating di a su un secondo elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 2 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Si confrontino gli errori relativi $\frac{\tilde{a}-a}{a}$, $\frac{\hat{a}-a}{a}$ fra di loro e con le precisioni di macchina degli elaboratori di cui sopra commentando i risultati.

Assegnati i numeri reali $a = \frac{10}{7}$, $b = \frac{1}{4}\ 10^3$, $c = 32\ 10^{-1}$ siano $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} =$, $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c} =$ i lori floating rispettivamente su due elaboratori ideali che utilizzano le basi $\beta = 10$, $\beta = 2$ ed $m = 2$ cifre per la rappresentazione della mantissa (senza limiti sulla caratteristica) che opera per arrotondamento. Si chiede di:
1) effettuare la somma $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}$ scegliendo opportunamente l'ordine di esecuzione e motivandone la scelta;
2) effettuare la somma $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ scegliendo opportunamente l'ordine di esecuzione e motivandone la scelta.

Consideriamo un elaboratore operante con rappresentazione in base $\beta = 10$, aritmetica floating-point e tecnica di troncamento. Siano $m = 3$ le cifre a disposizione della mantissa e $n = 2$ le cifre per la caratteristica. Si chiede di:

1. determinare la precisione di macchina dell'elaboratore sopra descritto;
2. determinare $\tilde{A}$, la rappresentazione floating-point della seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0.003 \\ 1/4 & 4/310^2 \end{pmatrix};$$
3. usando l'aritmetica dell'elaboratore calcolare $\|\tilde{A}\|_1$.

Si dia la definizione di precisione di macchina e se ne spieghi l'importanza attraverso semplici esempi.

Consideriamo un elaboratore operante con rappresentazione in base $\beta = 10$, aritmetica floating-point e tecnica di arrotondamento. Siano $m = 4$ le cifre a disposizione della mantissa e $n = 2$ le cifre per la caratteristica. Si chiede di:

1. determinare la precisione di macchina dell'elaboratore sopra descritto;
2. determinare la rappresentazione floating-point dei seguenti vettori:
$$x = (-6.8877,\, 0.0034567, 2.7), \qquad y = (27.299,\, 10^{100},\, 0.6\ 10^{-77})$$
specificando quali componenti sono esattamente rappresentate in macchina;
3. usando l'aritmetica dell'elaboratore calcolare $\|x\|_1$ e $\|x\|_\infty$;
4. discutere il concetto di precisione di macchina di un elaboratore e l' utilita' della sua conoscenza.

Dati i vettori $x = (100, 0.03, 11/3)$, $y = (3200, 1/2, 1/4 \cdot 10^{-2})$ siano $\tilde{x},\ \tilde{y}$ le loro rappresentazioni floating point su un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per troncamento (senza limitazioni sulla caratteristica). Si calcoli la $||\tilde{x} + \tilde{y}||_\infty$ $||\tilde{x} + \tilde{y}||_1$.

Assegnata la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 2 & 10 & 0 \\ \frac{1}{100} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ed i vettori
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{100} \end{pmatrix}$$
si determinino $x_1 = A^{-1}b_1, \quad x_2 = A^{-1}b_2$ in cui, l'eventuale calcolo dell'inversa, deve essere fatto con il metodo di Gauss.Considerato quindi un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 10 con 4 cifre per la rappresentazione della mantissa (senza limitazioni sulla caratteristica) e che opera per troncamento si calcolino l'errore assoluto $\|\tilde{x}_2 \oplus (-\tilde{x}_1)\|_1$ e l'errore relativo $\frac{\|\tilde{x}_2 \oplus (-\tilde{x}_1)\|_1}{\||\tilde{x}_2\|_1}$ dove $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono i floating di x_1 e di x_2

Siano assegnati i numeri reali $a = \frac{12}{5}$ e $b = \frac{1}{3}$. Supponendo di operare con un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 2 con 3 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica) siano $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ il floating di a e di b. Si esegua la somma dei numeri $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ e si stimi l'errore relativo $\frac{(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) - (a+b)}{a+b}$.

Assegnato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 3.599 \\ 10^{-3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \cdot 10^{-2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

se ne determini la soluzione utilizzando il metodo di Gauss nell'aritmetica finita di un elaboratore ideale che utilizza $m = 3$, $\beta = 10$, opera per arrotondamento e non ha limitazioni sulla rappresentazione della caratteristica.

Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 100 & 0 & \frac{1}{500} \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 + \frac{7}{5} & \frac{1}{10000} & 0 \end{pmatrix}$$

nell'artmetica finita di un elaboratore ideale che utilizza $m = 3$, $\beta = 10$, opera per arrotondamento e non ha limitazioni sulla rappresentazione della caratteristica, si determini il floating di A, $\tilde{A}$. Si calcoli quindi $\|\tilde{A}\|_1$.

Assegnato il sistema lineare $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 3000 & 0 & 0 \\ 0.002 & 400 & 1 \\ 1000 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

se ne determini la soluzione utilizzando il metodo di Gauss nell'aritmetica finita di un elaboratore ideale che utilizza $m = 3$, $\beta = 10$, opera per arrotondamento e non ha limitazioni sulla rappresentazione della caratteristica (si determini cioe' la soluzione lavorando, in precisione finita, con il floating di A e di b).

Quale e' la precisione di macchina dell'elaboratore di cui sopra? Si presenti un algoritmo per determinarla.

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Se ne determini la soluzione x utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale. Si calcoli inoltre il determinante della matrice dei coefficienti.

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se ne determini la soluzione x utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale. Si calcoli inoltre il determinante della matrice dei coefficienti.

Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se ne determini il determinante ed il numero di condizionamento $K_1(B)$.

Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se ne determini il determinante ed il numero di condizionamento $K_\infty(B)$.

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se ne determini la soluzione x utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss. Si determini anche il determinante.

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

si discuta la convergenza del metodo iterativo di Jacobi e, in caso di convergenza, si effettuino due iterazioni del metodo a partire dal vettore $x^0 =$

$(1, 1, 1, 1)$. Si calcoli infine la norma 2 dell'errore al secondo passo $||x^2 - x||_2$ determinando la soluzione x del sistema lineare utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

Assegnato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca (motivando la risposta) se il metodo iterativo di Gauss-Seidel risultera' convergente a partire dal vettore iniziale $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. In caso affermativo (e solo in tal caso) si eseguano due iterazioni del metodo per determinare $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in cui α e' un numero reale positivo se ne studi il condizionamento al variare del parametro α. L'eventuale calcolo dell'inversa, deve essere fatto con il metodo di Gauss.

Si definisca il numero di condizionamento di una matrice e se ne presenti il significato.

Assegnato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca (motivando la risposta) se il metodo iterativo di Gauss-Seidel risultera' convergente a partire dal vetttore iniziale $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$. In caso affermativo (e solo in tal caso) si eseguano due iterazioni del metodo per determinare $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

Si dimostri che un metodo iterativo basato sullo splitting $A = M - N$ e' convergente se e solo se $lim_{k \to \infty}(M^{-1}N)^k = 0$.

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

si discuta la convergenza del metodo iterativo di Jacobi e, in caso di convergenza, si effettuino due iterazioni del metodo a partire dal vettore $x^0 = (1, 1, 1, 1)$. Si calcoli infine la norma 2 dell'errore al secondo passo $||x^2 - x||_2$ determinando la soluzione x del sistema lineare utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

Assegnato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

si stabilisca (motivando la risposta) se il metodo iterativo di Jacobi risultera' convergente a partire dal vetttore iniziale $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. In caso affermativo (e solo in tal caso) se eseguano due iterazioni del metodo per determinare $x^{(1)}$ e

Si discuta la convergenza di un metodo iterativo per la risoluzione di sistemi lineari basato sullo splitting di una matrice A del tipo $A = M - N$.

Assegnati i seguenti sistemi lineari

$$S1: \quad Ax = b \qquad \text{e} \qquad S2: \quad Az = b_p$$

della forma

$$S1: \begin{cases} 835\, x_1 + 667\, x_2 = 168 \\ 333\, x_1 + 266\, x_2 = 67 \end{cases} \qquad S2: \begin{cases} 835\, z_1 + 667\, z_2 = 168 \\ 333\, z_1 + 266\, z_2 = 66 \end{cases}$$

si chiede di:

1. calcolare le soluzioni di entrambi i sistemi, utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss;

2. usando la norma infinito, valutare l'errore relativo con cui b approssima b_p e quello che con cui x approssima z;

3. calcolare $k_\infty(A)$ e interpretare i risultati ottenuti in precedenza.

N.B.Il sistema S2 è ottenuto da S1 modificando la seconda componente del termine noto

Presentare il metodo di eliminazione di Gauss con particolare riferimento alla tecnica di pivoting parziale.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se ne determini il determinante e $K_\infty(A)$.

Si dimostri che $K(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ puo' essere interpretato come un fattore di amplificazione dell'errore sui dati nei risultati

Si presenti l'algoritmo di sostituzione in avanti per la risoluzione di un sistema lineare triangolare inferiore.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se ne determini il numero di condizionamento K_∞ determinando l'inversa di A utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss con eventuali varianti del pivot.

Si definisca il numero di condizionamento di un sistema lineare e se ne discuta il significato.

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se ne determini un'approssimazione della soluzione $x = (0, 1, 0)^T$ effettuando 2 passi dei metodi di Gauss seidel e di Jacobi. Si stimino quindi gli errori commessi ai vari passi per i due metodi. E' possibile stabilire la convergenza di Jacobi e di Gauss Seidel?

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Si stabilisca se il metodo di Jacobi e' convergente. In caso affermativo se ne determini una approssimazione della soluzione x effettuando 3 passi del metodo iterativo. Si calcolino quindi gli errori relativi (in norma 1) ad ogni passo.

Assegnate le coppie $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ si costruisca il polinomio interpolante. Si aggiunga quindi la coppia $(0.5, 1)$ e si calcoli il nuovo polinomio.

Si dia la definizione di base di Lagrange per la determinazione del polinomio interpolante.

Considerato il seguente insieme di dati (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2$ dove $x = (-3, -2, -1)$, $f = (0, 0, 1)$, si costruisca il polinomio interpolante utilizzando la matrice di Vandermonde e risolvendo il sistema lineare con il metodo di **Gauss con pivoting parziale**. Si determini quindi la quantita' $f[-3, -2, -1, -\frac{1}{2}]\omega_3(-\frac{1}{2})$ assumendo che $x_3 = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 0$.

Considerato il seguente insieme di dati (x_i, f_i), $i = 1, \ldots, 5$ dove $x = (-3, -2, -1, 0, 1)$, $f = (0, 0, -1, 0, 0)$, si costruisca il polinomio di grado due di migliore approssimazione ai minimi quadrati risolvendo il sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss con la variante del pivoting parziale .

Considerato il seguente insieme di dati (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, 4$ dove $x = (-2, 0, 1, 2)$, $f = (7, 1, 1, 3)$, si costruisca il polinomio interpolante utilizzando il metodo di Newton e si calcoli l'errore commesso nel punto -1 supponendo $f(-1) = 0$. Si costruisca quindi la retta di migliore approssimazione ai minimi quadrati.

Si scriva l'espressione analitica della base di Lagrange $l_3(x)$ relativa ai nodi precedenti dandone un grafico approssimativo che metta in evidenza le sue proprieta'.

Assegnate le coppie $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ si costruisca il polinomio interpolante. Si aggiunga quindi la coppia $(0.5, 1)$ e si calcoli il nuovo polinomio.

Si dia la definizione di polinomio di grado m di migliore approssimazione ai minimi quadrati un insieme di dati del tipo $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, n$ con $n >> m$.

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, 4$ dove $x = (-3, -2, 0, 1, 3)$, $f = (1, 0, -2, 0, 2)$, si costruisca il polinomio interpolante utilizzando il metodo di Newton. Si costruisca quindi la retta di migliore approssimazione ai minimi quadrati utilizzando il precedente insieme di dati.

Si scriva l'espressione analitica della base di Lagrange $l_2(x)$ relativa ai nodi precedenti e se ne discutano le proprieta' fondamentali.

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 1, \ldots, 5$ dove $x = (-1, 0, 1, 2, 3)$, $f = (0, 0, 1, 0, 0)$, si costruisca il polinomio di grado due di migliore approssimazione ai minimi quadrati risolvendo il sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss con la variante del pivoting parziale .

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 1, \ldots, 5$ dove $x = (-2, -1, 0, 1, 2)$, $f = (1, 0, -2, 0, 1)$, si costruisca il polinomio interpolante nella forma di Newton. Si aggiunga quindi la coppia $(1/2, 0)$ e si determini il nuovo polinomio interpolante.

Si scriva la forma generale del polinomio di Lagrange interpolante i dati $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, n$.

Si determini una approssimazione del numero reale $\sqrt[3]{3}$ utilizzando tre iterazioni del metodo iterativo di Newton.

Si presenti l'algoritmo del metodo di bisezione.

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 1, \ldots, 5$ dove $x = (-3, -1, 0, 1, 3)$, $f = (1, 0, -2, 0, 1)$, si costruisca la parabola di migliore approssimazione ai minimi quadrati.

Considerata la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{4}$ ed il seguente insieme di punti fondamentali dell'interpolazione $\{x_i\}_{i=0}^4$ dove $x = (-3, -1, 0, 1, 3)$, si costruisca la parabola di migliore approssimazione risolvendo il sistema lineare delle equazioni normali con il metodo di Gauss.

Si dia l'espressione analitica dell'errore della formula di interpolazione $E_4(x) = f(x) - p_4(x)$ dove $p_4(x)$ e' il polinomio interpolante la funzione f nei punti fondamentali dell'interpolazione $\{x_i\}_{i=0}^4$ fornendone una dimostrazone.

Si dia la definizione di polinomio di grado m di migliore approssimazione ai minimi quadrati un insieme di dati del tipo $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, n$ con $n >> m$.

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 1, \ldots, 5$ dove $x = (-3, -1, 0, 1, 3)$, $f = (8, 0, -1, 0, 8)$, si costruisca il polinomio interpolante tali dati e quello interpolante tali dati piu' la coppia $(2, 0)$.

Considerata la funzione $f(x) = e^x + x$ si individui un intervallo contenente l'unico suo zero e se ne determini una approssimazione con due passi del metodo di Newton dopo averne verificato le condizioni di convergenza nell'individuato intervallo.

Assegnati i punti $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{5}$ con $x = (-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2)$ ed $f = (-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ si determini:
1) il polinomio interpolante nella forma di Newton;
2) il polinomio interpolante nella forma di Lagrange;
3) la retta di migliore approssimazione ai minimi quadrati.

Sia f la funzione reale di variabile reale $f(x) = log(x) + x$ per $x > 0$. Dopo avere localizzato lo zero di tale funzione se ne determini tre approssimazioni utilizzando 2 passi del metodo di Newton, 2 passi del metodo delle secanti e 2 passi del metodo di bisezione. Si confrontino e commentino i risultati ottenuti

Sia f la funzione reale di variabile reale $f(x) = cos\frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}$. Dopo avere localizzato lo zero di tale funzione per $x > 0$ se ne determini tre approssimazioni utilizzando 2 passi del metodo di Newton, 2 passi del metodo delle corde (scegliendo $m = ?$) e 2 passi del metodo di bisezione. Si confrontino e commentino i risultati ottenuti.

Considerata la funzione $f(x) = \sqrt{x} - 2$ si individui un intervallo contenente l'unico suo zero e se ne determini una approssimazione con due passi del metodo della bisezione. Si stimi il numero dei passi necessario per ottenere un errore minore o uguale di 10^{-2}.

Supponendo di operare con un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 2 con 3 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica) siano $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ il floating di $a = 2/3$ e di $b = 7/3$. Si applichino quindi due passi del metodo della bisezione per determinare lo zero della funzione $\frac{x}{2} - 1$ in $[a, b]$.

Si discuta il metodo di Newton per la determinazione degli zeri di una funzione non lineare presentandone un algoritmo che includa almeno un criterio di arresto.

Per la funzione $f(x) = x^3 - 6x$ si consideri l'intervallo $[0.003, \sqrt{7}]$ in cui esiste un suo zero positivo ($\alpha > 0$) ed si scelga in tale intervallo un punto x_0 che sia estremo di Fourier per il metodo di Newton indicando chiaramente quali sono le condizioni che lo caratterizzano come tale.

Nell'aritmetica finita di un elaboratore ideale che utilizza $m = 3$, $\beta = 10$, opera per arrotondamento e non ha limitazioni sulla rappresentazione della caratteristica, si determino x_1 ed x_2 approssimazioni di α ottenute a partire da $x_0 = 0.002$ utilizzando il metodo di Newton. Si calcoli quindi la precisione di macchina dell'elaboratore in oggetto.

Supponendo di operare con un elaboratore ideale che rappresenta i numeri reali in base 2 con 3 cifre per la rappresentazione della mantissa e che opera per arrotondamento (senza limitazioni sulla caratteristica) siano $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ il floating di $a = 13/5$ e di $b = 16/5$. Si applichino quindi due passi del metodo della bisezione per determinare lo zero della funzione $\frac{x}{3} - 1$ in $[a, b]$.

Si presenti un algoritmo del metodo della bisezione che includa almeno un criterio di arresto.

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 0, \ldots, 4$ dove $x = (-2, -1, 0, 1, 2)$, $f = (1, -1, -1, 1, 5)$, si costruisca il polinomio interpolante. Si aggiunga quindi il punto $(-3, 5)$ e si determini il nuovo polinomio interpolante.

Considerato il seguente insieme di dati $(x_i, f_i),\ i = 1, \ldots, 7$ dove $x = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$, $f = (0, 0, -1, 0, 1, 0, 0)$, si costruisca il polinomio di grado due di migliore approssimazione ai minimi quadrati risolvendo l sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss.