Confronto fra valore del misurando e valore di riferimento (1 di 2)

Talvolta si deve esprimere un parere sulla accettabilità o meno di una caratteristica fisica del misurando mediante il confronto fra il valore del misurando (che quantifica la caratteristica fisica) ed un valore di riferimento stabilito da norma o accordo fra acquirente e venditore. Si tratta di stabilire se il valore del misurando è inferiore (o superiore) ad un valore limite ammissibile, oppure se il valore del misurando è *compatibile* con (cioè non troppo scostato da) un valore vero convenzionale. Si deve conoscere (o assumere a-priori) la distribuzione di probabilità del misurando. Sia x_m la stima del misurando e s_m la sua incertezza (1 scarto tipo).

– Supponiamo che il criterio di accettazione richieda che il valore del misurando sia inferiore ad un certo valore limite x_r. Si valuta lo scarto relativo $t_r = \left(x_r - x_m\right)/s_m$ e la probabilità $\mathrm{Prob}\left\{t < t_r\right\}$. Se tale probabilità risulta sufficientemente alta (valore minimo di probabilità stabilito da norma o da contratto, ad esempio 99 %), allora la caratteristica fisica è accettabile, altrimenti non lo è.

  Esempio: Da una misura di campo elettromagnetico risulta che il campo elettrico emesso non intenzionalmente da un apparecchio biomedicale è 26 dB(μV/m) ± 3 dB (1 scarto tipo). La normativa di riferimento stabilisce: a) il limite di emissione: 30 dB(μV/m), b) il criterio di conformità al limite: probabilità di superare il limite inferiore al 5 %. Si assume che il campo elettrico segua la distribuzione normale. La probabilità che l'emissione di campo elettrico indesiderato sia inferiore al limite di emissione è $\mathrm{Prob}\left\{t < (30-26)/3\right\} = 90.8$ %. La probabilità di superare il limite è circa 9 %. Si conclude che l'apparecchio non è conforme al limite di norma.

Confronto fra valore del misurando e valore di riferimento (2 di 2)

– Supponiamo che si debba stabilire se il valore del misurando è compatibile con un valore di riferimento x_r (privo di incertezza o di incertezza trascurabile rispetto a quella associata al valore del misurando). Si valuta lo scarto relativo $t_r = |x_m - x_r| / s_m$ e la probabilità $\text{Prob}\{|t| > t_r\}$. Se tale probabilità risulta inferiore ad un certo valore minimo (convenzionalmente stabilito, ad esempio 1 %) allora il valore del misurando ed il valore di riferimento sono fra loro *incompatibili*. Altrimenti la compatibilità è dubbia o sono compatibili.

Esempio: Si deve stabilire se il materiale dielettrico utilizzato per isolare i conduttori interno e esterno di un cavo coassiale di caratteristiche elettriche ignote è Teflon o Polietilene. Da una tabella che riporta le costanti dielettriche relative di vari materiali isolanti, redatta da un ente autorevole, risulta che la costante dielettrica relativa del Teflon è 2.10, quella del Polietilene 2.26. Tramite una misura indiretta di costante dielettrica si ricava, per l'esemplare di cavo coassiale in questione, il valore 2.22 ± 0.04 (1 scarto tipo, distribuzione normale).

Si assume in prima battuta che l'isolante sia Polietilene e quindi che il valore vero della costante dielettrica sia 2.26. La probabilità di ottenere dalla misura indiretta un valore tanto scartato dal valore vero quanto il valore osservato 2.22 è $\text{Prob}\{|t| > |2.26 - 2.22| / 0.04\}$, cioè 32 %. Il valore misurato è quindi compatibile con il valore della costante dielettrica del Polietilene.

Si assume poi che l'isolante sia Teflon e quindi che il valore vero della costante dielettrica sia 2.10. In questo caso la probabilità di ottenere un valore misurato tanto scartato dal valore vero quanto lo è 2.22 è inferiore a $\text{Prob}\{|t| > |2.10 - 2.22| / 0.04\}$, cioè 0.3 %. Il valore misurato della costante dielettrica è perciò incompatibile con quello del Teflon. Si conclude che l'isolante è Polietilene.

Nota 1: più incerto è il valore del misurando più facile è che sia compatibile con il valore di riferimento

Nota 2: in entrambi gli esempi le probabilità sono state ricavate dalle tabelle di probabilità della distribuzione normale. Questa è la prassi.

Compatibilità delle misure

Si tratta di stabilire se due misure indipendenti dello stesso misurando sono fra loro *compatibili*. Sia x_{1m} il valore del misurando #1 e x_{2m} il valore del misurando #2. Siano poi s_{1m} e s_{2m} le rispettive incertezze. Si valuta la quantità

$$t_r = \frac{\left|x_{1m} - x_{2m}\right|}{\sqrt{s_{1m}^2 + s_{2m}^2}}$$

Se risulta $\text{Prob}\left\{|t| > t_r\right\}$ inferiore ad un certo valore minimo convenzionale (ad esempio 1 %) allora i due valori sono fra loro *incompatibili*.

<u>Esempio 1</u>: Si misura la resistenza di terra R_T di un'impianto elettrico con due metodi distinti: metodo #1 volt-amperometrico, metodo #2 del confronto. Dal metodo #1 si ottiene $R_{T1} = (22 \pm 2)\Omega$ (1 scarto tipo, distribuzione normale), applicando il metodo #2 risulta $R_{T2} = (18 \pm 3)\Omega$ (1 scarto tipo, distribuzione normale). Lo scarto di 4 Ω è del tutto plausibile: infatti la probabilità di uno scarto così ampio o superiore è $\text{Prob}\left\{|t| > |22-18|/5\right\}$ =42.37 %, per cui le misure sono compatibili.

<u>Esempio 2</u>: La stessa resistenza di valore nominale 50 Ω viene misurata con due multimetri di diversa marca. L'unico contributo all'incertezza di entrambe le misure è l'accuratezza del multimetro (incertezza di tipo B). Dalla misura con un multimetro si ottiene (50.5 ± 1.2) Ω (intervallo con probabilità uniforme), con l'altro multimetro si trova (48.12 ± 0.80) Ω (intervallo con probabilità uniforme). I due intervalli non sono sovrapposti, quindi le due misure sono incompatibili.

<u>Nota</u>: maggiore è l'incertezza di uno o di entrambi i valori del misurando più facile è che siano fra loro compatibili

Combinazione di misure indipendenti (media pesata)

Si conoscono due valutazioni indipendenti e compatibili, x_{1m} e x_{2m}, di uno stesso misurando e le relative incertezze, s_{1m} e s_{2m}. E' possibile ottenere, a partire da queste due valutazioni, una terza valutazione x_w più attendibile di ciascuna delle due e la relativa incertezza s_w. E' chiaro che la valutazione meno incerta deve avere maggior peso nella media.

$$x_w = \frac{w_1 x_{1m} + w_2 x_{2m}}{w_1 + w_2} \qquad \textit{media pesata}$$

$$s_w = \sqrt{\frac{1}{w_1 + w_2}} \qquad \textit{incertezza della media pesata}$$

Si è posto $w_i = 1/s_{im}^2$, con $i = 1,2$

Esempio: si misura la velocità di propagazione v di un'onda in una linea di trasmissione a microstriscia mediante una tecnica riflettometrica (dominio del tempo) basata sull'uso di oscilloscopio e generatore di impulsi e si ottiene $v_1 = (2.35 \pm 0.05) \cdot 10^8$ m/s (1 scarto tipo, distribuzione normale). Si determina poi indirettamente la stessa grandezza mediante un'altra tecnica di misura basata sull'uso di analizzatore di spettro e generatore a inseguimento (dominio della frequenza) e si ottiene $v_2 = (2.29 \pm 0.08) \cdot 10^8$ m/s (1 scarto tipo, distribuzione normale). Le due misure sono evidentemente compatibili. La migliore stima della velocità di propagazione a partire dalle due disponibili è $v = (2.33 \pm 0.04) \cdot 10^8$ m/s (1 scarto tipo, distribuzione normale).

Nota bene: è evidente che una terza stima ottenuta da due incompatibili è inattendibile

Reiezione delle osservazioni sperimentali: criterio di Chauvenet

Immaginiamo di ripetere una misura ottenendo una serie di N valori osservati $x_1, x_2, ...x_N$. Sia x_m la media degli N valori e s lo scarto tipo del campione. Supponiamo che uno degli N valori sia particolarmente scostato dalla media e quindi sia sospetto (lo scostamento sia originato da una causa accidentale: un errore dell'operatore, un disturbo impulsivo). Sia x_{sus} il valor sospetto. La probabilità di ottenere un valore tanto scostato dalla media quanto lo è x_{sus} è data da

$$\text{Prob}\left\{|t| > t_{sus}\right\} = p_{sus}$$

dove

$$t_{sus} = \frac{|x_{sus} - x_m|}{s}$$

La probabilità p_{sus} si ricava dalle tabelle di probabilità della distribuzione normale. Su N valori misurati c'è da attendersi che Np_{sus} siano scostati da x_m quanto x_{sus}. E' evidente che se $Np_{sus} \geq 1$ non è lecito scartare il dato sospetto. Il criterio di Chauvenet stabilisce che se $Np_{sus} < 1/2$ allora il dato x_{sus} va scartato, altrimenti no.

<u>Esempio</u>: Da una misura si ottengono i seguenti 10 valori di tensione (espressi in millivolt):

87.0 88.2 86.5 88.7 86.7 89.2 88.8 85.3 93.7 87.6

Si decide di applicare il criterio di Chauvenet per stabilire se il valore 93.7 mV è da scartare o meno. La media dei valori osservati è 88.2 mV, lo scarto tipo del campione 2.3 mV (calcolati includendo il valore sospetto). Dalle tabelle della distribuzione normale si ricava $p_{sus} = 1.6$ %, quindi $Np_{sus} = 0.16 < 0.5$. Quindi il dato 93.7 mV è da scartare. La media delle 9 osservazioni rimanenti è 87.6 mV, lo scarto tipo 1.3 mV.

Distribuzione *t* di Student (1 di 3)

– Quando si effettuano poche misure (N relativamente piccolo) l'incertezza della stima x_m, cioè lo scarto tipo della media s_m, è poco attendibile. Di conseguenza poco attendibile risulterà anche la stima dell'intervallo di fiducia.

– Assumiamo che il misurando segua la distribuzione normale. Il fattore di copertura che si ricava dalle tabelle di probabilità della distribuzione normale non dipende da N. Tuttavia è intuitivo che, fissato il livello di fiducia, per piccoli valori di N il fattore di copertura deve essere maggiore (più prudenziale) che per grandi valori di N. La distribuzione *t* di Student tiene in conto della incertezza su s_m. Al limite per N tendente all'infinito il fattore di copertura deve tendere a quello ricavabile dalle tabelle di probabilità della distribuzione normale.

– Se x è una grandezza che segue la distribuzione normale allora la grandezza

$$t = \frac{x_m - x_\mu}{s_m}$$

segue la distribuzione *t* di Student (x_μ è il valore atteso per x). La distribuzione *t* di Student è simmetrica, a valor medio nullo e per N tendente all'infinito tende alla normale con valore medio nullo e varianza pari a 1

– Al numero $N-1$ ci si riferisce spesso con l'espressione *gradi di libertà* e si usa il simbolo ν, cioè $\nu = N-1$

Distribuzione *t* di Student (2 di 3)

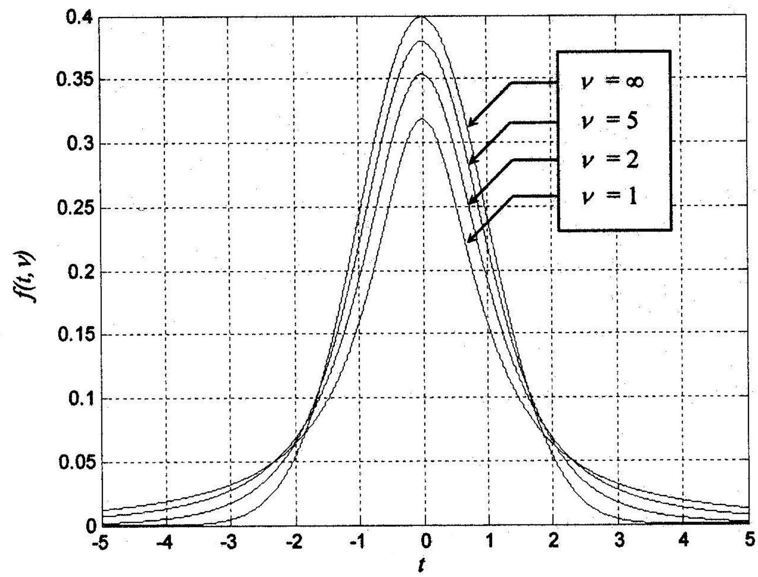

Tabella probabilità P entro ts_m

Gradi di libertà ν	P=60%	P=80%	P=90%	P=95%	P=98%	P=99%
1	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
20	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
30	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
∞	0.8417	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

Grafico e tabella estratti da: "Distribuzione di Student (*t di Student*): utili espressioni per la valutazione delle incertezze nelle misure EMC", M. Cati – Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni, Università degli Studi di Firenze, 29 Luglio 2002.

Distribuzione *t* di Student (3 di 3)

Esempio: si effettuano 4 misure del periodo di oscillazione di un pendolo semplice per ricavare, indirettamente, il valore della accelerazione di gravità g. La stima di g ottenuta sperimentalmente è (9.73 ± 0.03) m/s^2. (1 scarto tipo, distribuzione normale). Ci chiediamo se il valore misurato è compatibile con quello convenzionale di 9.81 m/ s^2 (arrotondato a due decimali) Accettiamo il rischio del 5 % di asserire il falso. I gradi di libertà sono 3, quindi il valore di *t*, dedotto dalla tabella di probabilità della distribuzione *t* di Student, corrispondente alla probabilità del 95 % è 3.18. Dato che

$$\frac{|9.81 - 9.73|}{0.03} = 2.67 < 3.18$$

si conclude che il risultato della misura è compatibile con il valore di riferimento.

Nota: se si fosse usata la tabella di probabilità della distribuzione normale, anziché della distribuzione *t* di Student, avremmo erroneamente affermato l'incompatibilità.