

Università degli studi di Trieste
Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria dell'Informazione
a.a. 2002/2003

APPUNTI del CORSO di TEORIA dei CIRCUITI

docente: Stefano Pastore

Contents

1	TESTI CONSIGLIATI	3
2	INTRODUZIONE	4
2.1	Classificazione dei circuiti elettrici	4
3	TEORIA DEI GRAFI E TOPOLOGIA	7
3.1	Grafi	7
3.2	Primo e secondo principio di Kirchhoff	7
3.3	Tripoli e n -poli	8
3.4	ITK alle maglie e concetto di albero	8
3.5	Teorema di Tellegen	9
4	BIPOLI	10
4.1	Bipoli resistivi	10
4.2	Bipoli dinamici	10
4.3	Teoremi di Thevenin e Norton	12
5	DOPPI-BIPOLI	13
5.1	Doppi-bipoli resistivi	13
5.2	Potenza nei doppi-bipoli resistivi	14
5.3	Proprietà dei doppi-bipoli	15
5.4	Doppi-bipoli dinamici	16
5.5	Sorgenti controllate ideali	16
5.6	Sorgenti controllate reali	17
5.7	Trasformatore ideale	18
5.8	Amplificatore operazionale ideale	18
5.9	Connessione tra doppi-bipoli	18
5.10	Teoremi di Miller	19
6	METODI PER LA SOLUZIONE DEI CIRCUITI	20
6.1	Teorema di sovrapposizione degli effetti	20
6.2	Metodo "tableau"	20
6.3	Metodo nodale puro e modificato	21
6.4	Metodo alle maglie puro e modificato	22
7	TRANSITORI	24
7.1	Dominio del tempo - I ordine	24
7.2	Dominio del tempo - II ordine	25
7.3	Stabilità di un circuito nel dominio del tempo	27
7.4	Continuità della variabile di stato	27
7.5	Trasformata di Laplace	28
8	FUNZIONI DI RETE	29
8.1	Funzioni $H(s)$	29
8.2	Funzione $H(s)$ sull'asse immaginario $s = j\omega$	30
8.3	Diagrammi di Nyquist	32

8.4	Diagrammi di Bode	32
8.5	Esempio con Matlab	35
8.6	Circuiti risonanti	36

1 TESTI CONSIGLIATI

1. L. O. Chua, C. A. Desoer, e S. Kuh: "Circuiti Lineari e Nonlineari", Gruppo Editoriale Jackson, Milano.
2. C. K. Alexander, M. N.O. Sadiku: "Circuiti Elettrici", Mc-Graw-Hill, Milano.
3. G. Martinelli, M. Salerno: "Fondamenti di Elettrotecnica, vol. I e II", ed. Siderea, Roma.
4. V. Daniele, A. Liberatore, R. Graglia e S. Manetti: "Elettrotecnica", Monduzzi Editore, Bologna.
5. L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh: "Linear and Nonlinear Circuits", Mc-Graw-Hill, New York.
6. N. Balabanian: "Electric Circuits", Mc-Graw-Hill, New York.
7. R. C. Dorf, J. A. Svoboda: "Electric Circuits", John Wiley & Sons, New York.
8. A. Sedra, K. Smith: "Microelectronic Circuits", Oxford University Press, New York.
9. P. Horowitz, W. Hill: "The Art of Electronics", Cambridge University Press, New York.
10. Editor W. K. Chen, "The Circuits and Filters Handbook", CRC Press (for IEEE press), USA.
11. R. Saal, "Handbook of Filter Design", AEG Telefunken.

LIBRI DI ESERCIZI

1. S. A. Nasar: "3000 solved problems in electric circuits", Schaum's solved problems series, Mc-Graw-Hill, New York.
2. R. D. Strum, J. R. Ward: "Electric circuits and Networks", Prentice-hall, Englewood Cliffs.
3. M. Biey: "Esercitazioni di Elettrotecnica", CLUT, Torino.
4. A. Liberatore, S. Manetti, M.C. Piccirilli e A. Reatti: "Circuiti Elettrici ed Elettronici", collana Tutor, ETAS libri, Milano.
5. S. Bobbio: "Esercizi di Elettrotecnica", CUEN, Napoli.
6. "The Electric Circuits Problem Solver", Research and Education Association (REA), New York.

2 INTRODUZIONE

In queste poche pagine, intendiamo proporre degli appunti che siano di ausilio allo studio dei circuiti a parametri concentrati. Essi forniscono una traccia da seguire nella preparazione di questo esame, ma non possono assolutamente sostituire nè l'assidua frequenza delle lezioni, nè l'integrazione fornita dai testi citati nell'apposito elenco.

A riguardo della lista di libri ed eserciziari citati, il loro nutrito numero trova giustificazione nel fatto che lo studente deve abituarsi a cercare ed approfondire i singoli argomenti trattati nel corso su più testi, confrontandone il metodo espositivo e le argomentazioni correlate. Questa abitudine mentale sarà molto importante non solo nel prosieguo degli studi, ma anche nella successiva vita professionale. Siamo all'Università ormai, e non ci si può più permettere il lusso di limitarsi a studiare pedissequamente da un unico testo, ma bisogna abituarsi a sviluppare un certo senso critico, indispensabile per la professione di ingegnere.

Infine, ribadiamo ancora il concetto che la frequenza *attiva* delle lezioni è necessaria a una buona comprensione (con conseguente superamento dell'esame!) della materia svolta, dove con *attiva* si intende che si debba cercare di *comprendere* quello che si sente a lezione e che si trasferisce sulla carta sotto forma di *appunti*, ponendo domande al docente sui punti non perfettamente chiari.

2.1 Classificazione dei circuiti elettrici

Lo scopo principale del corso è fornire gli strumenti teorici appropriati per l'analisi e la sintesi di un circuito elettrico. Ovviamente un compito così genericamente formulato è molto difficile da affrontare, specialmente in un solo corso universitario, per cui dobbiamo assolutamente circoscrivere l'argomento, determinando chiaramente una sotto-classe di circuiti su cui focalizzare l'attenzione. Il problema non è solo formale, ma sostanziale in quanto i modelli da applicare a circuiti che lavorano in modo *diverso* comportano equazioni completamente *diverse* tra loro nella struttura e nella soluzione.

Abbiamo mescolato indiscriminatamente finora la parola *circuito* con la parola *modello*, senza specificare cosa si intende per l'uno o per l'altro. E' bene essere chiari su questo punto fin dall'inizio.

I circuiti reali, che chiameremo *circuiti fisici*, sono costruiti interconnettendo tra loro vari componenti, per esempio su una piastra o altro supporto, e sono sede di fenomeni di tipo elettrico e magnetico. Poichè è nostra intenzione capirne il funzionamento e prevederne il comportamento, dobbiamo associare a questi circuiti fisici dei modelli matematici che ci permettano di scrivere delle opportune equazioni. La risoluzione di queste equazioni dovrebbe darci le informazioni richieste. Dico dovrebbe perchè il punto più delicato dell'intero processo risiede proprio nell'operazione di *associazione* dell'opportuno modello al circuito fisico che dobbiamo analizzare.

Introduciamo quindi la prima importante divisione dei modelli circuitali in due classi fondamentali:

$$\begin{cases} a \text{ costanti distribuite} \\ a \text{ parametri concentrati} \end{cases}$$

La prima classe viene adottata generalmente quando le frequenze in gioco sono *molto alte*, e porta ad equazioni simili nella struttura a quelle che descrivono un'onda elettromagnetica piana nello spazio. Nella seconda classe convergono, invece, tutti i circuiti

che lavorano a *basse frequenze*: sono detti a parametri concentrati perchè i principali fenomeni elettrici possono essere confinati in ben definiti volumi di spazio. Ad esempio, i condensatori racchiudono il campo elettrico, gli induttori il campo magnetico mentre le resistenze dissipano energia per effetto Joule.

Ma quale è il confine tra i due modelli, quando si deve applicare un modello piuttosto che l'altro? La risposta non è semplice, nè univoca, dal momento che il confine tra i campi di applicazione dei due modelli è sfumato. Vediamo di chiarire il problema con un esempio.

Consideriamo un ricevitore satellitare, collegato al primo demodulatore dell'antenna parabolica con un cavo coassiale lungo $l = 10$ m. Dal primo demodulatore esce un segnale diretto al ricevitore alla frequenza di 1 GHz, mentre il ricevitore genera a sua volta un segnale, a circa 20 KHz, destinato a comunicare all'illuminatore la polarizzazione, orizzontale o verticale, da attivare: i due segnali, il primo a 1 GHz ed il secondo a 20 KHz, convivono sullo stesso cavo coassiale. Il problema è: come devo procedere nella modellizzazione del cavo coassiale? Prima di rispondere, facciamo due semplici calcoli per trovare la lunghezza d'onda dei segnali in gioco. Supponendo, per semplicità, che la velocità del segnale sul cavo sia c (velocità della luce nel vuoto), si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \times 10^8}{10^9} = 0.3 \text{ m} \\ \lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^4} = 1.5 \times 10^4 \text{ m} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \ll l \\ \lambda_2 \gg l \end{array} \right.$$

Il confronto a destra tra le lunghezze d'onda e la lunghezza del cavo mette in luce una profonda differenza tra i due casi: la lunghezza d'onda λ_1 è molto minore della lunghezza l del cavo coassiale, mentre λ_2 è viceversa molto maggiore della stessa lunghezza l . Questo confronto ci dice che il segnale a 1 GHz impiega un tempo non trascurabile (rispetto al periodo del segnale) per propagarsi dal generatore (il demodulatore) al carico (il ricevitore), mentre il segnale a 20 KHz varia abbastanza lentamente da permettere di trascurare l'effettivo tempo di propagazione nel cavo stesso. Questa condizione sui tempi di propagazione sta alla base della scelta tra l'adozione di un modello a parametri concentrati o costanti distribuite. In un modello a parametri concentrati, i tempi di propagazione dei segnali sono istantanei e, quindi, le dimensioni fisiche dei collegamenti e dei componenti sono ininfluenti. Ovviamente questo non è più vero in un modello a costanti distribuite. Nel nostro esempio, lo stesso cavo coassiale dovrà essere modellizzato diversamente per i due segnali: come una linea di trasmissione a costanti distribuite per il segnale a 1 GHz, come un circuito a parametri concentrati per il segnale a 20 KHz. Notate che non si può associare a priori un modello al cavo in quanto tale, ma si deve considerare il cavo insieme alle sue condizioni di utilizzo.

In altre parole, quanto abbiamo appena detto si può riassumere nei seguenti termini: in un modello a parametri concentrati la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è virtualmente nulla, per cui non ci sono nozioni metriche e i fenomeni elettrici si svolgono in punti ad estensione nulla, posti nello spazio a distanza zero tra loro. Ne consegue che il campo elettrico e magnetico possono essere confinati in regioni di spazio ben definite, in componenti chiamati rispettivamente condensatori ed induttori, mentre i fenomeni di dissipazione dell'energia si verificano nei componenti detti resistenze.

Quando queste ipotesi non sono più vere, vedi il caso del cavo coassiale di prima con il segnale a 1 GHz, il modello a parametri concentrati deve essere sostituito da un altro

modello, quello a costanti distribuite. Diventano importanti le dimensioni fisiche dei collegamenti, mentre il campo elettrico e quello magnetico non sono più confinati in regioni ben definite dello spazio, bensì distribuiti nello spazio. Non esamineremo in dettaglio le caratteristiche di questo modello, in quanto saranno esaurientemente trattate in altri corsi.

Proseguiamo con la classificazione dei circuiti a parametri concentrati. Essi possono essere ulteriormente divisi nelle seguenti sotto-classi:

- 1) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Lineare}: \text{ tutti i componenti del circuito lavorano in modo lineare.} \\ \textit{Nonlineare}: \text{ almeno un componente del circuito lavora in modo nonlineare.} \end{array} \right.$
- 2) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Resistivo}: \text{ tutti i componenti sono resistivi.} \\ \textit{Dinamico}: \text{ almeno un componente è dinamico.} \end{array} \right.$
- 3) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Tempo-Invariante}: \text{ tutti i componenti sono invarianti nel tempo.} \\ \textit{Tempo-Variante}: \text{ almeno un componente varia nel tempo.} \end{array} \right.$

La prima distinzione riguarda l'adozione di equazioni lineari o nonlineari per la modellizzazione dei componenti del circuito sotto esame. Va ricordato che l'attribuzione di un modello lineare o nonlineare non è univoca per certi componenti, ma è determinata in funzione del circuito in cui il componente è inserito. Ad esempio, un amplificatore operazionale può essere usato sia come amplificatore lineare, sia come comparatore nonlineare, con conseguente ovvia differenza del modello da utilizzare.

Per la seconda distinzione, ricordiamo che i componenti dinamici (con memoria) sono i condensatori, gli induttori e le mutue induttanze. Un circuito dinamico è descritto da equazioni algebrico-differenziali, unite alle condizioni iniziali degli elementi con memoria; un circuito resistivo (tutti i componenti sono resistivi), ovverossia senza memoria, è descritto da equazioni algebriche, determinate soltanto dal valore delle sorgenti indipendenti.

Per la terza distinzione, se tutti i componenti del circuito (tranne le sorgenti indipendenti!) sono descritti da equazioni i cui coefficienti non dipendono dal tempo, allora il circuito è detto tempo-invariante, altrimenti è detto tempo-variante. Un esempio di componente tempo-variante è l'interruttore, il cui valore di resistenza cambia alla sua chiusura o apertura.

In questo corso, per motivi di tempo, ci occuperemo principalmente di circuiti a parametri concentrati lineari, tempo-invarianti resistivi o dinamici. Cercheremo comunque di fare degli accenni alle problematiche inerenti il comportamento e l'analisi di circuiti nonlineari (contenenti transistori e diodi) e tempo-varianti (contenenti interruttori) per l'importanza che rivestono nell'elettronica di oggi. Va da sé che la comprensione dei circuiti più semplici è fondamentale per una futura comprensione dei circuiti cosiddetti attivi, cioè contenenti componenti a semiconduttore, su cui sono interamente imperniati i corsi di elettronica.

Nel prosieguo di questi appunti non parleremo più di modelli, ma semplicemente di circuiti, sottintendendo che l'associazione del corretto modello è già stata fatta precedentemente.

3 TEORIA DEI GRAFI E TOPOLOGIA

Un circuito è un'aggregazione di componenti a due o più terminali e i punti in cui essi convergono sono chiamati *nodi del circuito*. Per ora supponiamo che il nostro circuito contenga solo bipoli.

3.1 Grafi

Possiamo associare ad ogni circuito un'entità matematica \mathcal{G} chiamata *grafo*, formata da un insieme di nodi \mathcal{N} (nodi del circuito) e da un insieme di rami \mathcal{B} (bipoli del circuito) che collegano i nodi tra loro. Notiamo che abbiamo così evidenziato la struttura topologica del circuito, cioè il modo in cui sono connessi i componenti tra loro, senza preoccuparsi dei modelli dei componenti stessi.

Ad ogni nodo è associato un potenziale, mentre ad ogni ramo sono associate una corrente e una tensione. Il potenziale di un nodo preso a caso (nodo di riferimento) è posto a zero, mentre gli altri nodi (detti indipendenti) hanno potenziali generalmente diversi da zero. Una proprietà del circuito che si trasferisce al corrispondente grafo è la *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi ogni nodo indipendente ha un potenziabile riferibile al nodo di riferimento tramite le tensioni dei rami che collegano i due nodi.

Ogni ramo del grafo deve essere orientato, ottenendo così un grafo orientato: questa orientazione corrisponderà al verso positivo della corrente in quel ramo. L'orientazione della tensione del ramo non può essere fatta indipendentemente da quella della corrente. La tensione sarà orientata secondo la *convenzione normale* (degli utilizzatori) se la freccia della tensione punterà al terminale dove entra la corrente. Con questa convenzione, la potenza $p(t) = v(t)i(t)$ è positiva se dissipata, negativa se erogata. Se la tensione è orientata in senso opposto (convenzione dei generatori), allora la potenza è negativa se dissipata, positiva se erogata. Noi adotteremo usualmente la convenzione normale.

3.2 Primo e secondo principio di Kirchhoff

I principi di Kirchhoff (primo e secondo) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

1. Il primo principio (\mathcal{IK}) ci dice che la somma delle correnti in un nodo è nulla per qualsiasi t .
2. Il secondo principio (\mathcal{IJK}) può essere formulato in due modi equivalenti tra loro:
 - La somma delle tensioni su una maglia è nulla per qualsiasi t ;
 - Ogni tensione di ramo è data dalla differenza dei potenziali di nodo.

Vediamo di scrivere le equazioni \mathcal{IK} e \mathcal{IJK} utilizzando il grafo associato al circuito. Supponiamo che il grafo associato abbia n nodi e b rami orientati. Possiamo costruire, allora, la *matrice ridotta di incidenza* \mathbf{A} , che ha tante righe quanti sono i nodi indipendenti ($n - 1$) e tante colonne (b) quanti sono i rami:

$$\mathbf{A} [(n-1) \times b]: \begin{cases} a_{kj} = 1 & \text{se il ramo } j \text{ esce dal nodo (indipendente) } k \\ a_{kj} = -1 & \text{se il ramo } j \text{ entra dal nodo (indipendente) } k \\ a_{kj} = 0 & \text{se il ramo } j \text{ non tocca il nodo (indipendente) } k \end{cases}$$

Il nodo di riferimento non viene quindi considerato nella scrittura della matrice \mathbf{A} . Le equazioni relative a \mathcal{IK} possono allora essere scritte in forma matriciale:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

dove \mathbf{i} è il vettore di dimensione $[b \times 1]$ delle correnti di ramo. Si dimostra che la matrice \mathbf{A} è a rango pieno.

Provvediamo a orientare le tensioni di ramo secondo la convenzione normale. Si dimostra che le equazioni \mathcal{IK} sono:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e} \quad (3.2)$$

dove \mathbf{v} è il vettore di dimensione $[b \times 1]$ delle tensioni di ramo e \mathbf{e} è il vettore di dimensione $[(n-1) \times 1]$ dei potenziali di nodo.

Notate che abbiamo scritto $b + n - 1$ equazioni in $2b + n - 1$ incognite: per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora b equazioni, e precisamente i modelli dei b componenti.

3.3 Tripoli e n -poli

I tripoli sono componenti a 3 terminali: si possono, quindi, definire 3 correnti entranti nei terminali e 3 tensioni tra coppie diverse di terminali. dal momento che \mathcal{IK} e \mathcal{IKK} valgono anche per il tripolo, solo 2 delle 3 correnti e 2 delle tre tensioni sono indipendenti. Possiamo, quindi, fissare un terminale di riferimento (uno qualsiasi dei tre) verso cui misurare le tensioni di ramo degli altri due terminali indipendenti, considerando la corrente entrante nel terminale di riferimento dipendente dalle altre due. Da un punto di vista topologico e della teoria dei grafi, possiamo, allora, descrivere il tripolo con una coppia di rami (del grafo associato) congiunti nel nodo di riferimento. Ogni ramo ha una propria corrente (diretta verso il terminale di riferimento) e una tensione ai capi orientata con la convenzione normale.

I tripoli possono essere inseriti ora nei nostri circuiti: ogni tripolo sarà sostituito con una coppia di rami orientati verso il nodo di riferimento (del tripolo) scelto. La matrice \mathbf{A} si costruisce, quindi, analogamente a quanto fatto prima per i soli bipoli.

Un n -polo è un componente a n terminali. Come nel caso del tripolo, è caratterizzato da $(n-1)$ tensioni e $(n-1)$ correnti indipendenti. Il suo grafo è, pertanto, formato da $(n-1)$ rami orientati riuniti nel nodo di riferimento.

3.4 \mathcal{IKK} alle maglie e concetto di albero

Il \mathcal{IKK} può essere enunciato considerando le maglie del circuito. Per questo, introduciamo il concetto di *albero* \mathcal{T} associato ad un grafo \mathcal{G} :

1. \mathcal{T} è un sottografo di \mathcal{G} con tutti i nodi e una parte dei rami; ogni ramo conserva la sua orientazione;
2. \mathcal{T} è connesso;

3. \mathcal{T} non ha maglie: c'è un solo percorso che collega ogni coppia di nodi.

Ovviamente, ad ogni grafo è associato più di un albero. Comunque, ogni albero \mathcal{T} ha $n - 1$ rami.

I rami di \mathcal{G} appartenenti a \mathcal{T} sono chiamati *rami dell'albero*, mentre i rimanenti sono chiamati *rami del coalbero*. Se aggiungiamo un ramo del coalbero a \mathcal{T} , creiamo una maglia che è formata da rami dell'albero e da quell'unico ramo del coalbero. Per ogni ramo del coalbero, possiamo ripetere l'operazione formando ogni volta una maglia diversa, indipendente da tutte le altre. Si può allora dimostrare che il numero di maglie indipendenti di un circuito è pari ai rami del coalbero, e precisamente $b - (n - 1) = b - n + 1$.

Operativamente, per trovare le maglie indipendenti di un circuito, si deve associare un albero \mathcal{T} al grafo \mathcal{G} del circuito, quindi scrivere \mathcal{IK} (somma delle tensioni della maglia nulla) per ogni maglia associata ad un ramo del coalbero.

Otterremo un sistema di equazioni lineari nelle tensioni di ramo \mathbf{v} :

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

dove la matrice \mathbf{B} (matrice ridotta delle maglie) è formata da 1, -1 e 0 e ha dimensione $[(b - n + 1) \times b]$.

3.5 Teorema di Tellegen

Il teorema di Tellegen:

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_b i_b = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{e}^T \mathbf{A}) \mathbf{i} = \mathbf{e}^T (\mathbf{A} \mathbf{i}) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

dice che la somma delle potenze di un circuito PC è nulla ad ogni istante. Questo significa che, in un sistema chiuso, la potenza erogata in ogni istante è dissipata da altri componenti del circuito, in un perenne bilanciamento: nulla si crea e nulla si distrugge! Questo teorema serve a dedurre molte ed importanti proprietà energetiche dei circuiti.

4 BIPOLI

I bipoli lineari e tempo-invarianti possono essere resistivi (non dinamici) o dinamici. Nel primo caso, possono essere descritti usando tensioni e correnti nel dominio del tempo, nel secondo caso è spesso conveniente passare nel dominio delle trasformate di Laplace o di Steinmetz.

4.1 Bipoli resistivi

In generale, possiamo scrivere la seguente equazione implicita:

$$av(t) + bi(t) = h(t) \quad (4.1)$$

dove $v(t)$ e $i(t)$ sono la tensione e la corrente del bipolo, orientate secondo la convenzione normale. E' l'equazione implicita di una retta nel piano (v, i) .

Se esplicito la tensione ($a \neq 0$) ottengo il cosiddetto *modello di Thevenin* del bipolo:

$$v(t) = Ri(t) + v_s(t) \quad (4.2)$$

Questa rappresentazione esiste se il bipolo non è un generatore ideale di corrente ($i(t) = f(t)$). Il componente è chiamato, in questo caso, *controllato in corrente*, in quanto la tensione è determinata univocamente dalla corrente.

Se esplicito la corrente ($b \neq 0$) ottengo il cosiddetto *modello di Norton* del bipolo:

$$i(t) = Gv(t) + i_s(t) \quad (4.3)$$

Questa rappresentazione esiste se il bipolo non è un generatore ideale di tensione ($v(t) = f(t)$). Il componente è chiamato, in questo caso, *controllato in tensione*, in quanto la corrente è determinata univocamente dalla tensione.

Le stesse equazioni possono essere scritte per le grandezze trasformate della tensione e della corrente, essendo i parametri a, b, R, G etc. costanti.

Esempio: [Laplace] $aV(s) + bI(s) = H(s)$, $V(s) = RI(s) + V_s(s)$, [Steinmetz] $V(j\omega) = RI(j\omega) + V_s(j\omega)$

4.2 Bipoli dinamici

I bipoli dinamici che considereremo sono il condensatore e l'induttore lineari tempo-invarianti. Le relazioni costitutive di questi bipoli lineari dinamici sono, rispettivamente:

$$q(t) = C v(t), \quad \varphi(t) = L i(t).$$

Da queste relazioni si ricavano le equazioni differenziali, che sono, rispettivamente:

$$\begin{cases} i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ v(0) = v_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ i(0) = i_0 \end{cases}; \quad (4.4)$$

le equazioni integrali sono, rispettivamente:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0), \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0). \quad (4.5)$$

L'energia accumulata sotto forma di campo elettrico in un condensatore è:

$$\mathcal{E}_C(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = \int_0^t v(\tau)i(\tau) d\tau = C \int_0^{v(t)} v(\tau) dv(\tau) = \frac{1}{2}C [v^2(t) - v^2(0)]. \quad (4.6)$$

L'energia accumulata sotto forma di campo magnetico in un induttore è:

$$\mathcal{E}_L(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = \int_0^t v(\tau)i(\tau) d\tau = L \int_0^{i(t)} i(\tau) di(\tau) = \frac{1}{2}L [i^2(t) - i^2(0)]. \quad (4.7)$$

Quindi l'energia accumulata dipende soltanto dai valori della tensione (corrente) agli estremi, e non dal percorso effettuato per raggiungerli. Questo dipende dal fatto che $p(\tau) d\tau$ è un differenziale esatto, in entrambi i casi. Non è altrettanto vero per i resistori, che infatti dissipano energia, ma non l'accumulano. Per convenzione, si fissa l'estremo inferiore dell'energia \mathcal{E} a zero, situazione che corrisponde ad avere il condensatore (induttore) scarichi. Ciò ben si accorda con il fatto che l'energia dipende dal quadrato della tensione (corrente), e quindi ha il minimo a zero.

Le equazioni costitutive del condensatore, usando la trasformata di Laplace, sono:

$$I(s) = C [sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-), \quad (4.8)$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}. \quad (4.9)$$

L'equazione (4.8) corrisponde circuitalmente al parallelo di un condensatore scarico inizialmente e di un generatore di corrente impulsivo delta di Dirac di valore $-Cv(0^-)$. L'equazione (4.9) corrisponde circuitalmente alla serie di un condensatore scarico inizialmente e di un generatore di tensione gradino unitario di valore $v(0^-)$. Notate come le condizioni iniziali siano esplicitate adottando la trasformata di Laplace.

Le equazioni costitutive dell'induttore, usando la trasformata di Laplace, sono:

$$V(s) = L [sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-), \quad (4.10)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}. \quad (4.11)$$

L'equazione (4.10) corrisponde circuitalmente alla serie di un induttore scarico inizialmente e di un generatore di tensione impulsivo delta di Dirac di valore $-Li(0^-)$. L'equazione (4.11) corrisponde circuitalmente al parallelo di un induttore scarico inizialmente e di un generatore di corrente gradino unitario di valore $i(0^-)$.

Quando invece usiamo la trasformata di Steinmetz, lavoriamo su circuiti a regime, in cui il transitorio si è esaurito. Non ci sono quindi condizioni iniziali da considerare. Le equazioni sono, pertanto:

$$\begin{cases} V(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(j\omega) \\ I(j\omega) = j\omega C V(j\omega) \end{cases}, \quad \begin{cases} I(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(j\omega) \\ V(j\omega) = j\omega L I(j\omega) \end{cases}.$$

4.3 Teoremi di Thevenin e Norton

Due bipoli sono detti *equivalenti* se presentano la stessa caratteristica nel piano (v, i) . Teniamo presente che, nel caso di bipoli lineari tempo-invarianti, la detta caratteristica è una retta. I teoremi di Thevenin (Norton) stabiliscono un criterio per determinare un bipolo equivalente a uno dato. Essi affermano che:

- Ogni rete resistiva lineare tempo-invariante isolata \mathcal{N} , accoppiata con l'esterno solo con una porta (due terminali), può essere sostituita dalla rete equivalente, ad una porta, \mathcal{N}_{eq} formata dalla serie (parallelo) di un generatore di tensione $v_{eq}(t)$ (corrente $i_{eq}(t)$) ed una resistenza R_{eq} (conduttanza G_{eq}), senza che una rete esterna connessa ai terminali si accorga del cambiamento. La resistenza (conduttanza) equivalente R_{eq} (G_{eq}) si calcola ai terminali di \mathcal{N} cortocircuitando tutti i generatori di tensione indipendenti e aprendo tutti i generatori di corrente indipendenti. La tensione (corrente) $v_{eq}(t)$ ($i_{eq}(t)$) del generatore equivalente si calcola ai terminali di \mathcal{N} lasciati aperti (cortocircuitati), dopo aver attivato le sorgenti interne indipendenti.

Ricordiamo che i bipoli equivalenti serie (parallelo), chiamati *modelli di Thevenin* (*Norton*), sono equivalenti a \mathcal{N} in quanto hanno la stessa caratteristica nel piano (v, i) . Se esistono entrambi gli equivalenti di Thevenin e Norton per \mathcal{N} , la relazione tra i relativi parametri è:

$$R_{eq} = G_{eq}^{-1}; \quad v_{eq}(t) = R_{eq} i_{eq}(t) \quad (4.12)$$

Generalmente un bipolo ha entrambi i modelli, eccetto i generatori di tensione (corrente) ideali. In questo caso, si ha infatti che $R_{eq} = 0$ ($G_{eq} = 0$).

Se la rete è dinamico lineare tempo-invariante isolata, allora si possono usare le trasformate di Laplace o di Steinmetz. In questo caso, si lavorerà con le grandezze trasformate $V(s)$ e $I(s)$, ma il procedimento di determinazione dei parametri rimane formalmente lo stesso. Quindi, si procederà a trovare un generatore equivalente di tensione $V_{eq}(s)$ (corrente $I_{eq}(s)$) e una impedenza equivalente $Z_{eq}(s)$ (ammettenza $Y_{eq}(s)$).

Sempre formalmente, valgono tutte le relazioni trovate nel caso dei circuiti resistivi (dominio del tempo).

5 DOPPI-BIPOLI

Esaminiamo questi importanti componenti e le loro rappresentazioni, sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza.

5.1 Doppi-bipoli resistivi

I doppi-bipoli sono caratterizzati da due coppie di terminali chiamati *porte*. Ad ogni porta viene assegnata una tensione e una corrente, orientate usualmente secondo la convenzione normale. Perchè due terminali possano essere considerati una porta, è fondamentale che la corrente entrante in un terminale sia uguale alla corrente uscente dall'altro terminale.

La famiglia dei doppi-bipoli è piuttosto vasta: vi appartengono i trasformatori (componenti a due porte), e i componenti tripolari, come i transistori. In quest'ultimo caso le due porte sono definite, rispettivamente, tra i terminali indipendenti e il terminale di riferimento. Più cautela deve essere usata, invece, nel definire come doppi-bipoli i componenti generici a quattro morsetti. Generalmente questi componenti sono caratterizzati da tre tensioni e da tre correnti indipendenti che possono essere ridotte a due (corrispondenti alle porte), solo se il circuito esterno pone dei vincoli alle correnti entranti e uscenti in e da le coppie di terminali definiti come porte.

Un doppio-bipolo richiede, per essere descritto correttamente, due equazioni indipendenti tra loro. La generica *rappresentazione implicita*, in forma matriciale, è:

$$\mathbf{H}_v \mathbf{v}(t) + \mathbf{H}_i \mathbf{i}(t) = \mathbf{h}^s(t) \quad (5.1)$$

dove i vettori delle tensioni $\mathbf{v}(t)$, delle correnti $\mathbf{i}(t)$ e dei termini noti (sorgenti indipendenti) $\mathbf{h}^s(t)$ hanno dimensione 2. Le matrici \mathbf{H}_v e \mathbf{H}_i hanno dimensione $[2 \times 2]$. Per ottenere una delle cosiddette *rappresentazioni esplicite*, dobbiamo esplicitare due variabili alla volta in funzione delle due rimanenti, supposte indipendenti. Le rappresentazioni possibili sono perciò sei, e precisamente:

$$\text{Resistenza (\mathbf{R}):} \quad \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^s(t) \\ v_2^s(t) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\text{Conduttanza (\mathbf{G}):} \quad \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1^s(t) \\ i_2^s(t) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\text{Ibrida (\mathbf{H}):} \quad \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^s(t) \\ i_2^s(t) \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\text{Ib. seconda (\mathbf{H}''):} \quad \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h''_{11} & h''_{12} \\ h''_{21} & h''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1^s(t) \\ v_2^s(t) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\text{Trasmissione (\mathbf{T}):} \quad \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(t) \\ -i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^s(t) \\ i_1^s(t) \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\text{Tr. seconda (\mathbf{T}''):} \quad \begin{bmatrix} v_2(t) \\ -i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t''_{11} & t''_{12} \\ t''_{21} & t''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_2^s(t) \\ i_2^s(t) \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

I termini noti di ogni rappresentazione sono rappresentati dal vettore contrassegnato da "s", mentre la matrice di dimensione $[2 \times 2]$ è identificata con il nome all'inizio riga e con il simbolo indicato tra parentesi. Gli elementi di ogni matrice possono essere calcolati

mediante opportune misure prese alle porte del relativo doppio–bipolo. Notiamo che la rappresentazione corrispondente alla matrice \mathbf{R} è detta *controllata in corrente*, in quanto le tensioni sono funzioni delle correnti. Analogamente, la rappresentazione corrispondente alla matrice \mathbf{G} è detta *controllata in tensione*, in quanto le correnti sono funzioni delle tensioni.

Consideriamo, per esempio, la matrice \mathbf{R} . Le equazioni, scritte per esteso, sono:

$$\begin{cases} v_1(t) = r_{11} i_1(t) + r_{12} i_2(t) + v_1^s(t) \\ v_2(t) = r_{21} i_1(t) + r_{22} i_2(t) + v_2^s(t) \end{cases} \quad (5.8)$$

Si deduce che:

$$\begin{cases} v_1^s(t) = v_1(t) \\ v_2^s(t) = v_2(t) \end{cases} \quad \text{se: } i_1(t) = i_2(t) = 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2(t)=v_1^s(t)=0} [\Omega], & r_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1(t)=v_1^s(t)=0} [\Omega] \\ r_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2(t)=v_2^s(t)=0} [\Omega], & r_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1(t)=v_2^s(t)=0} [\Omega] \end{cases} \quad (5.10)$$

Quindi i coefficienti r_{kj} possono essere calcolati operando opportunamente alle porte del doppio–bipolo e sulle sorgenti interne. Ricordiamo che porre $v_j = 0$ significa cortocircuitare la porta, mentre porre $i_j = 0$ significa lasciarla aperta.

Le dimensioni e lo sviluppo dei coefficienti delle altre rappresentazioni possono essere dedotti in modo analogo a quello mostrato nei sistemi (5.9) e (5.10).

Sono valide le seguenti relazioni tra le rappresentazioni:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}''^{-1}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}''^{-1}. \quad (5.11)$$

Le prime quattro rappresentazioni sono chiamate *cardinali* perchè sono esplicitate una variabile di una porta e una dell'altra porta. Le ultime due sono caratteristiche delle connessioni in cascata. Il passaggio tra due delle rappresentazioni può essere fatto in modi diversi. Il più semplice consiste nell'elaborare le equazioni "ad occhio", in modo da ricavare le due variabili interessate.

Notate che non tutte le rappresentazioni esistono sempre, per un qualsiasi doppio–bipolo. Se, ad esempio, un doppio–bipolo ha una matrice delle resistenze tale che $\det(\mathbf{R}) = 0$, allora non esisterà la sua inversa, cioè la matrice delle conduttanze. In questo caso, infatti, la matrice \mathbf{R} ha due righe dipendenti tra loro, e così pure le tensioni sono dipendenti linearmente tra loro. Quindi non potrà esistere la \mathbf{G} , che presuppone che le tensioni siano indipendenti.

In generale, una rappresentazione esplicita non esiste quando le variabili che dovrebbero essere indipendenti per la rappresentazione in questione sono, in quel doppio–bipolo, legate tra loro da una dipendenza lineare.

5.2 Potenza nei doppi–bipoli resistivi

Per un doppio–bipolo, la potenza e il lavoro sono definiti:

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = \mathbf{v}(t)^T \mathbf{i}(t), \quad w(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau. \quad (5.12)$$

Se conosciamo una delle quattro rappresentazioni cardinali di un doppio–bipolo, siamo in grado di calcolarne la potenza. Supponiamo che un doppio–bipolo sia omogeneo e che si conosca la matrice \mathbf{G} . Allora possiamo scrivere:

$$p(t) = \mathbf{v}(t)^T \mathbf{i}(t) = \mathbf{v}(t)^T \mathbf{G} \mathbf{v}(t). \quad (5.13)$$

Quindi la matrice \mathbf{G} ci dà informazioni sulla potenza. Se abbiamo adottato la convenzione normale:

1. \mathbf{G} è (definita) semidefinita positiva $\Rightarrow p(t) \geq 0 \Rightarrow$ *componente dissipativo*;
2. \mathbf{G} è (definita) semidefinita negativa $\Rightarrow p(t) \leq 0 \Rightarrow$ *componente strettamente attivo*;
3. \mathbf{G} è antisimmetrica $\Rightarrow p(t) = 0 \Rightarrow$ *componente inerte*;
4. \mathbf{G} non rientra in uno dei casi precedenti \Rightarrow *componente attivo*; Se il doppio–bipolo ha delle sorgenti indipendenti, allora è sempre attivo.

Il componente viene invece detto:

1. *passivo* se $p(t) < 0$ limitatamente nel tempo; il lavoro assorbito non viene trasformato completamente in energia, ma in parte viene dissipato.
2. *attivo* se altrimenti.

5.3 Proprietà dei doppi–bipoli

Le principali proprietà sono:

1. *Reciprocità*: Connettendo una opportuna sorgente indipendente alla prima porta, posso misurare la risposta del doppio–bipolo alla seconda porta. Se connetto la stessa sorgente indipendente alla seconda porta, trovo la stessa risposta di prima alla prima porta. C'è quindi una simmetria di risposta del doppio–bipolo tra una porta e l'altra. Quindi: $r_{12} = r_{21}$, $g_{12} = g_{21}$, $h_{12} = -h_{21}$, $h''_{12} = -h''_{21}$, $\det(\mathbf{T}) = 1$, $\det(\mathbf{T}'') = 1$.
2. *Simmetria*: Scambiando le porte tra loro, la risposta del doppio–bipolo non cambia. Quindi le porte sono indistinguibili tra loro.
3. *Equilibratura*: un tripolo si dice equilibrato se le equazioni costitutive non cambiano al variare del terminale di riferimento.
4. *Unidirezionalità*: Una delle due equazioni non coinvolge nè la tensione, nè la corrente dell'altra porta. Quindi: $r_{12} = 0$, $g_{12} = 0$, $h_{12} = 0$, $h''_{12} = 0$, $\det(\mathbf{T}) = 0$, \mathbf{T}'' non esiste, oppure $r_{21} = 0$, $g_{21} = 0$, $h_{21} = 0$, $h''_{21} = 0$, \mathbf{T} non esiste, $\det(\mathbf{T}'') = 0$.
5. *Zerodirezionalità*: Le due porte sono sconnesse tra loro. Quindi: $r_{12} = r_{21} = 0$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $h_{12} = h_{21} = 0$, $h''_{12} = h''_{21} = 0$, \mathbf{T} e \mathbf{T}'' non esistono.

5.4 Doppi–bipoli dinamici

Un qualsiasi doppio–bipolo dinamico può essere descritto mediante trasformata di Laplace o trasformata di Steinmetz. Come per i bipoli, anche per i doppi–bipoli dinamici si definiscono le stesse rappresentazioni implicite ed esplicite. C'è una differenza, ovvia peraltro, nella nomenclatura: la matrice \mathbf{R} delle resistenze diventa la matrice \mathbf{Z} delle impedenze, e, analogamente, la matrice \mathbf{G} delle condutanze diventa la matrice \mathbf{Y} delle ammettenze.

Le proprietà e le definizioni date per i doppi–bipoli resistivi valgono anche per i doppi–bipoli descritti con le trasformate.

5.5 Sorgenti controllate ideali

Le sorgenti controllate sono doppi–bipoli resistivi unidirezionali, molto importanti nella modellizzazione degli elementi attivi. Stabiliscono una dipendenza lineare tra una tensione (o corrente) di un ramo con la tensione (o corrente) di un altro ramo dello stesso circuito. Si definiscono quindi in dipendenza delle variabili collegate. Sono quattro, e precisamente:

1. VCVS (Voltage–Controlled Voltage–Source) Sorgente di Tensione Controllata in Tensione:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = \alpha v_1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

dove il parametro α è un numero puro e rappresenta un guadagno di tensione;

2. CCVS (Current–Controlled Voltage–Source) Sorgente di Tensione Controllata in Corrente:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = r_m i_1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_m & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_m & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

dove il parametro r_m è una trans–resistenza di dimensione $[\Omega]$;

3. VCCS (Voltage–Controlled Current–Source) Sorgente di Corrente Controllata in Tensione:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = g_m v_1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_m & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1/g_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

dove il parametro g_m è una trans–conduttanza di dimensione $[\Omega^{-1}]$;

4. CCCS (Current–Controlled Current–Source) Sorgente di Corrente Controllata in Corrente:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

dove il parametro β è un numero puro e rappresenta un guadagno di corrente.

Le sorgenti controllate ideali sono doppi–bipoli attivi.

Possono essere usate, inoltre, per modellizzare un qualsiasi doppio–bipolo descritto con una rappresentazione cardinale. Supponiamo di conoscere la matrice delle resistenze \mathbf{R} di un doppio–bipolo:

$$\begin{cases} v_1(t) = r_{11} i_1(t) + r_{12} i_2(t) \\ v_2(t) = r_{21} i_1(t) + r_{22} i_2(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

Possiamo interpretare ogni equazione come la serie di due bipoli. Nel primo caso, la tensione $v_1(t)$ della prima porta è data dalla somma delle tensioni su una resistenza di valore r_{11} e su una CCVS di valore $r_{12} i_2(t)$. La tensione $v_2(t)$ della seconda porta è data dalla somma delle tensioni su una resistenza di valore r_{22} e su una CCVS di valore $r_{21} i_1(t)$. per la matrice H si ha invece:

$$\begin{cases} v_1(t) = h_{11} i_1(t) + h_{12} v_2(t) \\ i_2(t) = h_{21} i_1(t) + h_{22} v_2(t) \end{cases}, \quad (5.19)$$

dove la tensione $v_1(t)$ della prima porta è data dalla somma delle tensioni su una resistenza di valore h_{11} e su una VCVS di valore $h_{12} v_2(t)$. La corrente $i_2(t)$ della seconda porta è data dal parallelo di due bipoli, e precisamente dalla somma delle correnti di una conduttanza di valore h_{22} e di una CCCS di valore $h_{21} i_1(t)$.

5.6 Sorgenti controllate reali

Come per i bipoli, anche nei doppi-bipoli esistono le sorgenti indipendenti ideali e quelle reali. Nel caso delle sorgenti controllate reali si ha:

1. Sorgente Reale di Tensione Controllata in Tensione:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{r_{\text{ing}}} v_1 \\ v_2 = \alpha v_1 + r_{\text{usc}} i_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{\text{ing}}} & 0 \\ \alpha & r_{\text{usc}} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

dove r_{ing} e r_{usc} sono, rispettivamente, le resistenze di ingresso e di uscita;

2. Sorgente Reale di Tensione Controllata in Corrente:

$$\begin{cases} v_1 = r_{\text{ing}} i_1 \\ v_2 = r_m i_1 + r_{\text{usc}} i_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{\text{ing}} & 0 \\ r_m & r_{\text{usc}} \end{bmatrix}; \quad (5.21)$$

3. Sorgente Reale di Corrente Controllata in Tensione:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{r_{\text{ing}}} v_1 \\ i_2 = g_m v_1 + \frac{1}{r_{\text{usc}}} v_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{\text{ing}}} & 0 \\ g_m & \frac{1}{r_{\text{usc}}} \end{bmatrix}; \quad (5.22)$$

4. Sorgente Reale di Corrente Controllata in Corrente:

$$\begin{cases} v_1 = r_{\text{ing}} i_1 \\ i_2 = \beta i_1 + \frac{1}{r_{\text{usc}}} v_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{H} = \begin{bmatrix} r_{\text{ing}} & 0 \\ \beta & \frac{1}{r_{\text{usc}}} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

A causa della presenza delle resistenze sia nel ramo di ingresso che in quello di uscita, si possono applicare i teoremi di Thevenin e di Norton ai rami stessi, ottenendo l'equivalenza per tutte e quattro le sorgenti reali. In altre parole, si può trasformare una qualsiasi delle sorgenti reali in un'altra a scelta, sempre che r_{ing} e r_{usc} siano diverse da zero.

5.7 Trasformatore ideale

Il trasformatore ideale (da non confondere con il trasformatore reale) è un doppio-bipolo resistivo definito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = n v_2(t) \\ i_1(t) = \frac{1}{n} (-i_2(t)) \end{cases}, \quad (5.24)$$

dove n è chiamato *rapporto di trasformazione*. Esistono solo quattro delle sei rappresentazioni esplicite, non esistendo nè la matrice \mathbf{R} , nè la matrice \mathbf{G} , in quanto le tensioni e le correnti sono legate linearmente tra loro. Due rappresentazioni esistenti sono:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Il trasformatore ideale è, quindi, un doppio-bipolo reciproco e inerte. la potenza assorbita è:

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = v_1(t) i_1(t) + \frac{1}{n} v_1(t) (-n i_1(t)) = 0 \quad (5.26)$$

identicamente nulla, in qualsiasi istante di tempo. La potenza è, quindi, trasferita intatta da una porta all'altra, con la modifica, dipendente da n , dei valori della tensione e della corrente. Una proprietà importante riguarda l'impedenza di ingresso. Supponiamo che un trasformatore con rapporto di trasformazione n sia chiuso con una resistenza di valore R_L , il che equivale a dire che la resistenza R_L è collegata ai morsetti della seconda porta. La resistenza di ingresso, vista ai terminali della prima porta, sarà:

$$R_{\text{ing}} = \frac{v_1(t)}{i_1(t)} = n^2 \left(-\frac{v_2(t)}{i_2(t)} \right) = n^2 R_L. \quad (5.27)$$

5.8 Amplificatore operativo ideale

L'amplificatore operativo è un componente generalmente non lineare, che può, però, essere usato in una configurazione lineare. In tal caso, è caratterizzato dalla seguente coppia di equazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = 0 \\ i_1(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

La tensione e la corrente della seconda porta sono perciò non vincolate.

Le sue applicazioni sono molteplici e di notevole importanza.

5.9 Connessione tra doppi-bipoli

Le connessioni tra doppi-bipoli possono essere risolte partendo da opportune loro rappresentazioni esplicite, se la connessione stessa non altera il comportamento originale dei doppi-bipoli. In tal caso, si può risolvere ugualmente la connessione ricorrendo ai vincoli dati dalla connessione stessa.

Le principali connessioni tra due doppi-bipoli \mathcal{A} e \mathcal{B} sono le seguenti.

1. *Connessione parallelo* \rightarrow le tensioni di entrambe le porte sono comuni $\Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b$;

2. *Connessione serie* \rightarrow le correnti di entrambe le porte sono comuni $\Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b$;
3. *Connessione in cascata diretta e inversa* \rightarrow la seconda porta di \mathcal{A} è connessa alla prima porta di $\mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b, \mathbf{T}'' = \mathbf{T}_a'' \mathbf{T}_b''$;
4. *Connessione ibrida* \rightarrow le correnti della prima porta e le tensioni della seconda porta sono comuni $\Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b$;
5. *Connessione ibrida seconda* \rightarrow le tensioni della prima porta e le correnti della seconda porta sono comuni $\Rightarrow \mathbf{H}'' = \mathbf{H}_a'' + \mathbf{H}_b''$.

5.10 Teoremi di Miller

I teoremi di Miller risolvono dei casi particolari di connessione tra doppi-bipoli, e precisamente quella parallelo e quella serie, quando non esistono le relative matrici \mathbf{G} e \mathbf{R} .

- *I teorema di Miller*: Una resistenza R in parallelo a un doppio-bipolo \mathcal{A} , caratterizzato dalla relazione: $v_2(t) = \alpha v_1(t)$, può essere sostituita da due resistenze R_1 e R_2 da porre, rispettivamente, in parallelo alla prima e alla seconda porta di \mathcal{A} , di valore:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{R}{1 - \alpha} \\ R_2 = \frac{R}{1 - \frac{1}{\alpha}} \end{array} \right. , \quad (5.29)$$

senza che una rete esterna si accorga del cambiamento. Il doppio-bipolo con R_1 e R_2 risulta, quindi, equivalente al primo con R . Notate che \mathbf{G}_a non esiste dal momento che le due tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono dipendenti linearmente tra loro.

- *II teorema di Miller*: Una resistenza R in serie a un doppio-bipolo \mathcal{A} , caratterizzato dalla relazione: $i_2(t) = \beta i_1(t)$, può essere sostituita da due resistenze R_1 e R_2 da porre, rispettivamente, in serie alla prima e alla seconda porta di \mathcal{A} , di valore:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = R (1 + \beta) \\ R_2 = R \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \end{array} \right. , \quad (5.30)$$

senza che una rete esterna si accorga del cambiamento. Il doppio-bipolo con R_1 e R_2 risulta, quindi, equivalente al primo con R . Notate che \mathbf{R}_a non esiste dal momento che le due correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono dipendenti linearmente tra loro.

6 METODI PER LA SOLUZIONE DEI CIRCUITI

In questo capitolo, esamineremo i principali metodi generali di analisi dei circuiti. Per quanto riguarda i circuiti lineari, cominciamo con l'introdurre un importantissimo principio.

6.1 Teorema di sovrapposizione degli effetti

Il teorema di sovrapposizione degli effetti è valido soltanto per i circuiti lineari tempo-invarianti. Il suo enunciato è:

- Qualsiasi tensione o corrente di un circuito lineare ben posto, "a regime", può essere espressa come combinazione lineare delle M sorgenti indipendenti di tensione e delle N sorgenti indipendenti di corrente, e precisamente, indicando con $x_k(t)$ la k -esima tensione o la k -esima corrente:

$$x_k(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m v_m^s(t) + \sum_{m=M+1}^{M+N} \beta_m i_m^s(t) = \sum_{m=1}^{M+N} x_{km}(t) \quad (6.1)$$

dove i coefficienti α_m e β_m sono indipendenti dai valori delle sorgenti stesse.

Questo teorema ha delle applicazioni pratiche molto importanti. Oltre ad essere utile teoricamente nella dimostrazione di altri teoremi e proprietà dei circuiti, permette anche di risolvere un circuito lineare tempo-invariante considerando attiva una sorgente alla volta. Se, infatti, poniamo a zero tutte le sorgenti meno la prima, possiamo calcolare la soluzione $x_{k1}(t)$. Ripetendo l'operazione per ogni sorgente h , attiva una alla volta (da sola), possiamo calcolare tutti i contributi $x_{kh}(t)$. La loro somma sarà la variabile $x_k(t)$ cercata.

Questa procedura è molto utile particolarmente quando le sorgenti indipendenti hanno forme d'onda diverse, in quanto, spesso, i metodi di soluzione "più comodi" sono caratteristici delle sorgenti stesse. Ad esempio, se le sorgenti sono costanti e sinusoidali, sarà opportuno applicare il metodo dei fasori per quest'ultime, mentre per le sorgenti costanti si possono considerare aperti i condensatori e cortocircuitate le induttanze.

6.2 Metodo "tableau"

Il metodo "tableau" permette di scrivere le equazioni di qualsiasi circuito a parametri concentrati (PC). Abbiamo visto, nel Capitolo 2, come si possano scrivere in forma compatta le equazioni di Kirchhoff di un circuito. Queste equazioni danno una descrizione topologica del circuito, indifferentemente dal tipo di componenti usati. Per completarne quindi la descrizione, si devono aggiungere le equazioni costitutive dei componenti, che danno il legame esistente tra le correnti e le tensioni dei rami. Complessivamente, il metodo descritto permette di scrivere le seguenti equazioni, per un circuito generico con n nodi e b rami:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{f}(\mathbf{v}(t), \mathbf{i}(t), t) = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (6.2)$$

dove $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{i}(t)$ sono vettori di dimensione $[b \times 1]$, $\mathbf{e}(t)$ è un vettore di dimensione $[(n-1) \times 1]$, \mathbf{A} è una matrice $[(n-1) \times b]$ e $\mathbf{f}(\cdot)$ è una funzione $\mathcal{R}^{2b+1} \rightarrow \mathcal{R}^b$. Complessivamente, abbiamo $2b+n-1$ equazioni in $2b+n-1$ incognite. Se il circuito è LRT-I, le equazioni costitutive diventano:

$$\mathbf{H}^v \mathbf{v}(t) + \mathbf{H}^i \mathbf{i}(t) = \mathbf{h}_s(t), \quad (6.3)$$

per cui il sistema complessivo può essere scritto in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{I}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^v & \mathbf{H}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_s(t) \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

dove \mathbf{T} ha dimensioni $[(2b+n-1) \times (2b+n-1)]$. Il circuito è "ben posto" se la matrice \mathbf{T} è invertibile, cioè se $\det(\mathbf{T}) \neq 0$, altrimenti c'è qualche difetto di modellizzazione. Notate come la matrice \mathbf{T} cresca rapidamente di dimensioni al crescere del circuito, pur avendo la notevole proprietà di essere formata da un gran numero di zeri, cioè di essere sparsa. Si tratta di un metodo che ha un'importanza soprattutto teorica, in quanto permette di dimostrare parecchi teoremi e proprietà dei circuiti.

Se il circuito è LDT-I, si può passare al dominio delle trasformate, dove, almeno formalmente, le equazioni restano le stesse. Se viene usata la trasformata di Laplace, si devono estrarre le condizioni iniziali dei componenti dinamici (tensioni su condensatori e correnti su induttori), prima di scrivere le equazioni tableau. A quel punto, potremo caratterizzare gli elementi dinamici con le loro impedenze, mentre le condizioni iniziali andranno a far parte del vettore dei termini noti. le equazioni avranno la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{I}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^v(s) & \mathbf{H}^i(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(s) \\ \mathbf{V}(s) \\ \mathbf{I}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_s(s) + \mathbf{H}_0(s) \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

6.3 Metodo nodale puro e modificato

Il metodo nodale permette di scrivere le equazioni di un qualsiasi circuito PC in maniera più efficiente del metodo tableau, nel senso che riduce drasticamente le dimensioni del sistema. Naturalmente contiene le stesse informazioni contenute nel metodo precedente, anche se condensate già in fase di scrittura delle equazioni stesse. Il metodo può essere applicato a un qualsiasi circuito PC, anche se, inizialmente, supponiamo che contenga soltanto componenti controllati in tensione. Il termine "controllato in tensione" si applica a tutti i componenti (bipoli, tripoli e multi-poli) per cui le correnti sono funzioni delle tensioni.

Prendiamo in considerazione i nodi indipendenti del circuito e scriviamo le equazioni di \mathcal{IK} . Avremo quindi scritto $n-1$ equazioni nelle b correnti di ramo. Usando le relazioni costitutive e ricordando che i componenti sono controllati in tensione, esprimiamo ogni corrente in funzione della relativa tensione di ramo. A questo punto, non ci resta che applicare \mathcal{IK} alle tensioni di ramo per scrivere il sistema finale nei $n-1$ potenziali di

nodo. La sequenza di operazioni può essere sintetizzata così per un circuito LRT-I:

$$\begin{cases} 1) \mathbf{A} \mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \\ 2) \mathbf{i}(t) = \mathbf{G} \mathbf{v}(t) + \mathbf{i}_s(t) \\ 3) \mathbf{v}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{e}(t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{G}^{\text{nod}}} \mathbf{e}(t) = \underbrace{-\mathbf{A} \mathbf{i}_s(t)}_{\mathbf{h}_s}, \quad (6.6)$$

dove $\mathbf{G}^{\text{nod}} = \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^T$ è la matrice nodale del circuito, di dimensioni $[n-1 \times n-1]$. Notate che le incognite del sistema sono i potenziali di nodo. Il metodo nodale si dice allora *puro*. Se il circuito è dinamico, si possono scrivere le equazioni sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza. Il metodo di scrittura delle equazioni non cambia se si lavora con le trasformate.

Se il circuito contiene componenti non controllati in tensione, allora si devono introdurre delle modifiche nella scrittura delle equazioni. Il metodo nodale si chiama infatti *modificato*. Consideriamo un nodo in cui convergano uno o più rami di componenti non controllati in tensione. Non è naturalmente possibile esprimere le correnti dei rami non controllati in funzione delle relative tensioni, per cui l'unica strada percorribile è aggiungere dette correnti all'insieme delle incognite. Alla fine dell'analisi di tutti i nodi, avrò ottenuto un sistema di $n-1$ equazioni in $n-1+m$ incognite, e precisamente i potenziali di nodo e_k , $k = 1, \dots, n-1$ e le correnti i'_h , $h = 1, \dots, m$ dei rami non controllati in tensione. Le m equazioni che mancano sono le equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione. A questo punto, ho ottenuto un sistema risolvibile di $n-1+m$ equazioni in $n-1+m$ incognite:

$$\mathbf{H}^{\text{mod}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{i}'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{h}_s. \quad (6.7)$$

6.4 Metodo alle maglie puro e modificato

Il metodo alle maglie rappresenta il metodo duale del metodo nodale. Permette di scrivere le equazioni di un qualsiasi circuito PC analogamente al precedente, anche se, inizialmente, supponiamo che contenga soltanto componenti controllati in corrente. Il termine "controllato in corrente" si applica a tutti i componenti (bipoli, tripoli e multi-poli) per cui le tensioni sono funzioni delle correnti.

Associamo un albero al grafo del circuito, consideriamo i rami del coalbero e le relative $b - (n-1)$ maglie indipendenti identificate da quest'ultimi. Per inciso, il termine *maglia* si applica ai grafi planari, che possono essere distesi su un piano senza sovrapposizione di rami, altrimenti si parla di anelli. Ogni *maglia* è formata da tanti rami dell'albero e da un ramo del coalbero; la corrente di quest'ultimo ramo rappresenta la corrente di *maglia*. Scriviamo le equazioni di \mathcal{IK} . Usando le relazioni costitutive e ricordando che i componenti sono controllati in corrente, esprimiamo ogni tensione in funzione della relativa corrente di ramo. A questo punto, non ci resta che applicare \mathcal{IK} alle correnti di ramo per scrivere il sistema finale nelle $b - (n-1)$ correnti di *maglia*. La sequenza di operazioni può essere sintetizzata così per un circuito LRT-I:

$$\begin{cases} 1) \mathbf{B} \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \\ 2) \mathbf{v}(t) = \mathbf{R} \mathbf{i}(t) + \mathbf{v}_s(t) \\ 3) \mathbf{i}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{I}^m(t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B}^T)}_{\mathbf{R}^m} \mathbf{I}^m(t) = \underbrace{-\mathbf{B} \mathbf{v}_s(t)}_{\mathbf{h}_s}, \quad (6.8)$$

dove $(\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B}^T)$ è la matrice delle maglie del circuito, di dimensioni $[b - (n-1) \times b - (n-1)]$. La matrice \mathbf{B} si chiama matrice ridotta delle maglie ed ha dimensioni $[b - (n-1) \times b]$.

Notate che le incognite del sistema sono le correnti di maglia. Il metodo alle maglie si dice allora *puro*. Se il circuito è dinamico, si possono scrivere le equazioni sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza. Il metodo di scrittura delle equazioni non cambia se si lavora con le trasformate.

Se il circuito contiene componenti non controllati in corrente, allora si devono introdurre delle modifiche nella scrittura delle equazioni. Il metodo alle maglie si chiama infatti *modificato*. Consideriamo una maglia in cui ci siano uno o più rami di componenti non controllati in corrente. Non è naturalmente possibile esprimere le tensioni dei rami non controllati in funzione delle relative correnti, per cui l'unica strada percorribile è aggiungere dette tensioni all'insieme delle incognite. Alla fine dell'analisi di tutte le maglie, avrò ottenuto un sistema di $b - (n - 1)$ equazioni in $b - (n - 1) + m$ incognite, e precisamente le correnti di maglia I_k^m , $k = 1, \dots, b - (n - 1)$ e le tensioni v_h' , $h = 1, \dots, m$ dei rami non controllati in corrente. Le m equazioni che mancano sono le equazioni costitutive dei componenti non controllati in corrente. A questo punto, ho ottenuto un sistema risolvibile di $b - (n - 1) + m$ equazioni in $b - (n - 1) + m$ incognite:

$$\mathbf{H}^m \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m(t) \\ \mathbf{v}'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{h}_s. \quad (6.9)$$

7 TRANSITORI

Prenderemo in considerazione circuiti lineari tempo-invarianti dinamici del I e II ordine, contenenti cioè, oltre agli elementi resistivi, uno o due componenti dinamici (condensatori e/o induttori) ed esamineremo il loro comportamento transitorio, da un certo istante fissato, fino alla comparsa di una situazione dinamica stabile, o di regime. Effettueremo l'analisi sia nel dominio del tempo che con la trasformata di Laplace.

7.1 Dominio del tempo - I ordine

I circuiti del I ordine contengono un condensatore o un induttore, mentre la parte resistiva del circuito può essere ridotta (ai morsetti del componente dinamico) con l'applicazione dei teoremi di Thevenin (condensatore) o di Norton (induttore).

Consideriamo un circuito con condensatore e scriviamo l'equazione differenziale del I ordine rappresentante l'evoluzione dinamica del circuito, dove R_{eq} e $v_{\text{eq}}(t)$ sono, rispettivamente, la resistenza equivalente e il generatore equivalente di Thevenin, $v_C(t)$ è la tensione ai capi del condensatore e $\tau_C = R_{\text{eq}}C$ è la costante di tempo del circuito:

$$\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{\tau_C} + \frac{v_{\text{eq}}(t)}{\tau_C}. \quad (7.1)$$

Consideriamo un analogo circuito con induttore e scriviamo l'equazione differenziale del I ordine rappresentante l'evoluzione dinamica del circuito, dove G_{eq} e $i_{\text{eq}}(t)$ sono, rispettivamente, la conduttanza equivalente e il generatore equivalente di Norton, $i_L(t)$ è la corrente nell'induttore e $\tau_L = G_{\text{eq}}L$ è la costante di tempo del circuito:

$$\dot{i}_L(t) = -\frac{i_L(t)}{\tau_L} + \frac{i_{\text{eq}}(t)}{\tau_L}. \quad (7.2)$$

Le due equazioni sono formalmente uguali, per cui possiamo scrivere per entrambi i circuiti:

$$\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + \frac{x_{\text{eq}}(t)}{\tau}, \quad (7.3)$$

con ovvio significato dei simboli.

La soluzione generale $x(t)$ dell'equazione (7.3) si compone della somma della soluzione $x^{\text{oa}}(t)$ dell'omogenea associata e di una soluzione particolare $x^{\text{p}}(t)$, o forzata o *a regime*:

$$x(t) = x^{\text{oa}}(t) + x^{\text{p}}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (x(0) - x^{\text{p}}(t)) + x^{\text{p}}(t), \quad (7.4)$$

dove $x(0)$ è il valore iniziale della tensione del condensatore o della corrente sull'induttore, τ è la costante di tempo del circuito, $x^{\text{oa}}(t)$ è la soluzione dell'omogenea associata e $x^{\text{p}}(t)$ è la soluzione particolare (a regime).

Per quanto riguarda la soluzione particolare, facciamo qualche ipotesi sulla forzante $x_{\text{eq}}(t)$. Ci sono delle funzioni che presentano la pregevole proprietà di avere una derivata della stessa forma della funzione stessa, come le funzioni costanti, esponenziali, sinusoidali e polinomiali. Questa proprietà si rivela particolarmente importante nel trovare la soluzione particolare dell'equazione differenziale (7.3), in quanto la soluzione particolare avrà la stessa forma della forzante. Esaminiamo, una alla volta, le varie possibilità:

- $x_{\text{eq}}(t) = K$ (forzante costante): la soluzione particolare è una costante: $x^p(t) = K'$. Il valore può essere trovato direttamente dal circuito notando che, in questo caso, i condensatori sono circuiti aperti e gli induttori corto circuiti.
- $x_{\text{eq}}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau_f}}$ (forzante esponenziale): la soluzione particolare è una esponenziale: $x^p(t) = K' e^{-\frac{t}{\tau_f}}$. Non si può agire direttamente sul circuito, per cui la soluzione particolare va sostituita nell'equazione differenziale (7.3), con incognita K' . Se $\tau = \tau_f$, allora la soluzione particolare sarà del tipo: $x^p(t) = K' t e^{-\frac{t}{\tau_f}}$.
- $x_{\text{eq}}(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (forzante sinusoidale): la soluzione particolare è una sinusoidale: $x^p(t) = K' \cos(\omega_0 t + \varphi')$. Si può ricorrere alla trasformata di Steinmetz (fasori), essendo il circuito a regime, per calcolare $X^p(j\omega_0)$, fasore di $x^p(t)$.
- $x_{\text{eq}}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ (forzante polinomiale): la soluzione particolare è un polinomio dello stesso grado: $x_C^p(t) = a'_n t^n + a'_{n-1} t^{n-1} + \dots + a'_0$. Come nel caso dell'esponenziale, la soluzione particolare va sostituita nell'equazione differenziale (7.3), andando poi ad uguagliare i coefficienti di pari grado dei polinomi.

Un requisito importante per qualsiasi circuito è la sua *stabilità*. Un circuito si dice stabile se, lasciato evolvere liberamente (senza forzanti) dalle sue condizioni iniziali, la soluzione tende a zero. Questa condizione è chiaramente soddisfatta se $\tau > 0$. In questo caso, l'energia immagazzinata nel circuito sarà dissipata e tenderà, pur essa, a zero.

7.2 Dominio del tempo - II ordine

Ad esempio di circuito del II ordine, consideriamo un circuito *RLC* risonante serie, con forzante $v_s(t)$ e $R, L, C > 0$. Scriviamo, innanzi tutto, un sistema di due equazioni del I ordine descriventi il circuito:

$$\begin{cases} v_s(t) = R i_L(t) + L \dot{i}_L(t) + v_C(t) \\ i_L(t) = C \dot{v}_C(t) \end{cases} \quad (7.5)$$

In questo sistema si possono esplicitare le derivate delle variabili $v_C(t)$ e $i_L(t)$, dette *variabili di stato* del circuito in quanto responsabili del contenuto energetico del circuito, e quindi del suo stato. Si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{i}_L(t) = -\frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} v_s(t) \\ \dot{v}_C(t) = \frac{1}{C} i_L(t) \end{cases}, \quad (7.6)$$

a cui vanno associate le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v_C(0) = v_0 \\ i_L(0) = i_0 = C \dot{v}_C(0) \end{cases} \quad (7.7)$$

le equazioni (7.6) possono essere risolte con le tecniche della teoria dei sistemi, utile strumento per analizzare circuiti dinamici lineari di ordine n . Infatti le equazioni (7.6) possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (7.8)$$

dove:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} v_s(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Otteniamo una equazione differenziale del II ordine dal sistema (7.6) sostituendo la seconda equazione nella prima (si può ottenere una analoga equazione nella variabile $i_L(t)$):

$$\ddot{v}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{v}_C(t) + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} v_s(t), \quad (7.10)$$

con le stesse condizioni iniziali di prima.

La soluzione di (7.10) può essere scomposta nella somma della soluzione della omogenea associata più una soluzione particolare. Per quanto riguarda la soluzione della omogenea associata, l'equazione caratteristica è:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0, \quad (7.11)$$

da cui:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (7.12)$$

Notiamo che le due radici (coincidenti con gli autovalori del sistema (7.8)) sono a parte reale negativa, essendo $R, L, C > 0$, e quindi il circuito è stabile. Ricordiamo che la soluzione omogenea è data dalla somma di due esponenziali con, ad esponente, le radici trovate (vedi corso di analisi).

Vogliamo ora che la risposta del circuito sia oscillante, e ciò avviene quando le radici p_1 e p_2 sono complesse coniugate. Dovrà perciò essere negativo il discriminante Δ della equazione (7.11):

$$\Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \Rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2z_0, \quad (7.13)$$

con z_0 impedenza caratteristica del circuito risonante, in analogia con le linee di trasmissione.

La soluzione generale è:

$$\begin{cases} v_C(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + v_C^p(t) \\ v_C(0) = v_0, \quad \dot{v}_C(0) = \frac{1}{C} i_0 \end{cases}, \quad (7.14)$$

dove le costanti k_1 e k_2 dipendono dalle condizioni iniziali. La soluzione particolare $v_C^p(t)$ si trova con le stesse modalità esposte per i circuiti del I ordine.

Se le radici dell'equazione caratteristica sono reali, la soluzione omogenea è composta dalla somma di esponenziali reali, mentre se $p_1 = -\sigma + j\omega$ e $p_2 = p_1^* = -\sigma - j\omega$ (anche $k_1 = k_2^* = |k_1| e^{j\varphi}$), la soluzione omogenea è una somma di esponenziali complesse, corrispondenti a una sinusoide smorzata (se il circuito è stabile):

$$\begin{cases} v_C(t) = 2 e^{-\sigma t} \operatorname{Re} \{k_1 e^{i\omega t}\} + v_C^p(t) = 2 |k_1| e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) + v_C^p(t) \\ v_C(0) = v_0, \quad \dot{v}_C(0) = \frac{1}{C} i_0 \end{cases}. \quad (7.15)$$

7.3 Stabilità di un circuito nel dominio del tempo

In generale, il concetto di stabilità è definito per circuiti di ordine n (contenenti n componenti dinamici). Si può dimostrare che è quasi sempre possibile scrivere un sistema di n equazioni del I ordine, descrittivi il circuito, del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (7.16)$$

In questo caso, gli autovalori della matrice \mathbf{A} sono chiamati *frequenze naturali* del circuito, in quanto sono i coefficienti degli esponenziali della soluzione omogenea del circuito. Va da sé che gli autovalori decidono la stabilità del circuito: il circuito è stabile se tutti gli autovalori sono a parte reale negativa, altrimenti è detto instabile. Ciò significa che un circuito stabile, lasciato evolvere senza sorgenti indipendenti a partire da una data condizione iniziale, tenderà a dissipare tutta la sua energia, portando le variabili di stato (tensioni dei condensatori e correnti negli induttori) a zero. Il concetto di stabilità di un circuito, legato al suo contenuto energetico, è da ascrivere a Lyapunov.

7.4 Continuità della variabile di stato

Le variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti sugli induttori) godono, sotto certe ipotesi, della importante proprietà della continuità.

Consideriamo, ad esempio, la tensione $v_C(t)$ ai capi di un condensatore. Essa è soggetta all'equazione (4.5), che ci permette di scrivere:

$$v_C(T + dt) - v_C(T) = \frac{1}{C} \int_T^{T+dt} i_C(t') dt', \quad \text{dove } T \in [t_a, t_b), T + dt \in [t_a, t_b]. \quad (7.17)$$

Quindi, se $|i_C(t)| < M$ nell'intervallo $[t_a, t_b]$, allora l'integrale di cui sopra è limitato (in valore assoluto) da $M dt$, che tende a zero come dt tende a zero. Ciò implica che: $v_C(T + dt) \rightarrow v_C(T)$ come $dt \rightarrow 0$, il che equivale a dire che la funzione $v_C(\cdot)$ è continua. la stessa dimostrazione può essere ripetuta per gli induttori, con un ovvio scambio di termini.

Se la corrente di un condensatore (tensione di un induttore) non sono limitate, allora le rispettive variabili di stato possono essere non continue. Un altro caso, in cui la continuità viene a mancare, si verifica quando la topologia del circuito è alterata dalla chiusura o apertura di un interruttore, per cui il numero di variabili di stato indipendenti viene alterato. Pensiamo, ad esempio, a due condensatori caricati inizialmente a tensioni diverse e messi in parallelo dalla chiusura di un interruttore ideale, tramite collegamenti ideali. Si verifica, al momento della chiusura, un brusco riallineamento delle tensioni, con un impulso di corrente, forzato dalla connessione parallelo. Per l'appunto, le variabili di stato indipendenti passano da due a una sola, la tensione ai capi del parallelo di condensatori. Si noti che la riduzione improvvisa del numero di variabili di stato indipendenti porta ad un impulso di corrente nel circuito.

Possiamo, infine, concludere dicendo che, quando non si verificano questi casi estremi di modellizzazione, le variabili di stato godono sicuramente della proprietà della continuità, proprietà che non è condivisa da tutte le tensioni e correnti del circuito stesso.

7.5 Trasformata di Laplace

Applicando la trasformata di Laplace ai circuiti lineari dinamici tempo-invarianti, si ha il vantaggio di trasformare le equazioni differenziali in equazioni algebriche, nella variabile s . E' però fondamentale procedere, prima dell'inizio dei calcoli, all'estrazione delle condizioni iniziali degli elementi dinamici. Si deve procedere come visto nella Sezione (4.2), dove è stato dimostrato che, per un condensatore:

$$I(s) = C [sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-), \quad (7.18)$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}, \quad (7.19)$$

mentre per un induttore:

$$V(s) = L [sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-), \quad (7.20)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}. \quad (7.21)$$

I modelli circuitali equivalenti sono dati da serie o paralleli degli elementi dinamici scarichi all'istante zero e di opportuni generatori indipendenti. Gli elementi dinamici scarichi inizialmente possono essere descritti con le impedenze e ammettenze, mentre i generatori delle condizioni iniziali possono essere considerati, a tutti gli effetti, come generatori indipendenti.

Fatta quest'operazione, si può procedere nel calcolo di qualsiasi tensione o corrente (trasformata) $X(s)$ del circuito, sostituendo ai componenti le loro impedenze o ammettenze in s e trasformando con Laplace le sorgenti indipendenti. Naturalmente, se si è interessati all'andamento nel dominio del tempo, si dovrà poi procedere alla antitrasformazione della variabile $X(s)$ trovata. Il concetto di stabilità di un circuito con Laplace sarà approfondito nella prossima sezione.

8 FUNZIONI DI RETE

Generalmente, i circuiti elettronici lineari sono progettati e strutturati per operare in sequenza su un dato segnale. Ogni sotto-circuito riceve il segnale da un sotto-circuito precedente, esegue delle "operazioni" sul segnale e, a sua volta, lo trasmette al sotto-circuito successivo, per un'ulteriore elaborazione. Lo schema circuitale che si può adottare, per descrivere il singolo sotto-circuito, consiste in un doppio-bipolo chiuso alla prima porta da un generatore indipendente di tensione o corrente (variabile di ingresso), e alla seconda porta da una impedenza di cui si vuole calcolare la tensione o la corrente (variabile di uscita). In questo schema, non siamo interessati alla conoscenza di tutte le variabili "intermedie" del doppio-bipolo, ma solo alla funzione che lega la variabile di ingresso (generatore) alla variabile di uscita (tensione o corrente sulla impedenza di uscita).

8.1 Funzioni $H(s)$

Se il circuito è lineare, tempo-invariante e dinamico, possiamo utilizzare la trasformata di Laplace per definire la funzione $H(s)$ come rapporto tra la trasformata della variabile di uscita (con pedice u) e la trasformata della variabile di ingresso (pedice s). Notiamo che le condizioni iniziali degli elementi dinamici del circuito devono essere poste a zero, poichè siamo interessati soltanto alla risposta del circuito dovuta all'ingresso. La funzione $H(s)$ è quindi uguale a:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_u(s)}{V_s(s)} \quad [A_v], \text{ numero puro} \\ H(s) &= \frac{V_u(s)}{I_s(s)} \quad [\Omega], \text{ trans-resistenza} \\ H(s) &= \frac{I_u(s)}{V_s(s)} \quad [S], \text{ trans-conduttanza} \\ H(s) &= \frac{I_u(s)}{I_s(s)} \quad [A_i], \text{ numero puro} \end{aligned} \tag{8.1}$$

dove le dimensioni di $H(s)$ sono indicate caso per caso, a seconda che le variabili di uscita e di ingresso siano tensioni o correnti. La variabile di ingresso rappresenta la grandezza pilotante, mentre la variabile di uscita è la grandezza pilotata.

La funzione $H(s)$ è ricavabile analiticamente partendo dalla descrizione sistemistica del circuito. Per un qualsiasi circuito lineare, tempo-invariante e dinamico, si possono scrivere i seguenti sistemi lineari (per i particolari, si rimanda al corso di teoria dei sistemi):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + D u(t) \end{cases}, \tag{8.2}$$

dove $y(t)$ e $u(t)$ indicano, rispettivamente, l'uscita e l'ingresso, mentre $\mathbf{x}(t)$ è il n -vettore delle variabili di stato (tensioni sui condensatori e correnti di induttanze). Dal momento che siamo interessati solo alla dipendenza di $y(t)$ da $u(t)$, poniamo a zero il vettore $\mathbf{x}(0)$ delle condizioni iniziali. Trasformando con Laplace il sistema, otteniamo:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C} [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D \tag{8.3}$$

Ne deriva che la trasformata $H(s)$ di una qualsiasi funzione di rete è sempre espressa da un rapporto di polinomi in s a coefficienti reali, cioè:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots b_1 s + b_0} \\ &= K s^u \frac{\prod_{m=1}^{M_{zr}} \left(1 + \frac{s}{\sigma_{zm}}\right) \prod_{m=1}^{M_{zc}} \left(1 + \frac{s}{q_{zm}\omega_{0zm}} + \frac{s^2}{\omega_{0zm}^2}\right)}{\prod_{m=1}^{M_{pr}} \left(1 + \frac{s}{\sigma_{pm}}\right) \prod_{m=1}^{M_{pc}} \left(1 + \frac{s}{q_{pm}\omega_{0pm}} + \frac{s^2}{\omega_{0pm}^2}\right)}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

dove abbiamo utilizzato il teorema fondamentale dell'algebra per scomporre i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ nel prodotto dei termini di primo e secondo grado corrispondenti alle loro radici. I termini di primo grado corrispondono a radici reali poste in $s = -\sigma$, mentre i termini di secondo grado corrispondono a radici complesse coniugate di modulo ω_0^2 . Il termine q stabilisce l'angolo che la coppia di radici complesse coniugate forma con l'asse delle ascisse:

$$q = \frac{1}{2 \sin(\varphi - \pi/2)} = \frac{-1}{\cos \varphi}; \quad (8.5)$$

deve essere $|q| > 0.5$, altrimenti le radici sarebbero reali, e quindi comprese tra i fattori di primo grado.

Le radici di $D(s)$ sono chiamati *poli* della funzione $H(s)$, mentre le radici di $N(s)$ sono chiamati *zeri*. E' facile verificare che i poli coincidono con un sottoinsieme degli autovalori (frequenze naturali) della matrice di stato \mathbf{A} . Infatti qualche frequenza naturale può mancare se si verifica una cancellazione polo-zero tra $N(s)$ e $D(s)$, il che equivale a dire che esistono dei modi non-controllabili o non-osservabili. Ad ogni modo, ne consegue che il circuito analizzato tramite la funzione di rete è stabile se i poli della $H(s)$ sono negativi, se reali, e hanno parte reale negativa, se complessi. I coefficienti σ_{pm} e q_{pm} devono quindi essere positivi.

In generale, l'informazione sulla stabilità del circuito è contenuta nella funzione $H(s)$, che può essere trovata direttamente da un'analisi "semplificata" del circuito, senza passare attraverso il tramite delle equazioni di stato e senza necessariamente ricorrere a un metodo generale di analisi.

Diamo un ulteriore significato alla funzione $H(s)$. Ricordando che $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, dalla eq. (8.3) otteniamo che:

$$Y(s) = H(s) U(s) = H(s) \quad \text{se } : U(s) = 1. \quad (8.6)$$

Quindi la funzione $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ rappresenta la risposta impulsiva del circuito, cioè l'uscita che ottengo quando applico un ingresso impulsivo al circuito. Questa è una definizione operativa, per cui posso effettivamente caratterizzare un circuito misurando con un oscilloscopio, ad esempio, la risposta ottenuta applicando un impulso all'ingresso. Non resta che effettuare, numericamente, la trasformata di Laplace della funzione $h(t)$ misurata.

8.2 Funzione $H(s)$ sull'asse immaginario $s = j\omega$

Supponiamo che la funzione $H(s)$ contenga l'asse immaginario nel suo semipiano di convergenza. Questa condizione è sicuramente verificata per le funzioni $H(s)$ di nostro interesse

in quanto stabili (i loro poli giacciono nel semipiano sinistro di s). Imponendo che $s = j\omega$, otteniamo:

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega). \quad (8.7)$$

Ci domandiamo ora se esiste una relazione tra questa funzione $H(j\omega)$ e la funzione $H'(j\omega)$, calcolata nel dominio dei fasori per un ingresso sinusoidale, definita come rapporto tra:

$$H'(j\omega) = \frac{Y e^{j\varphi_y}}{U e^{j\varphi}}, \quad (8.8)$$

dove il fasore $U e^{j\varphi}$ corrisponde all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cos(\omega_0 t + \varphi)$ e il fasore $Y e^{j\varphi_y}$ corrisponde all'uscita $y(t) = Y \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s) \mathcal{L}\{U \cos(\omega_0 t + \varphi)\} = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{U \cos \varphi s - U \omega_0 \sin \varphi}{s^2 + \omega_0^2}, \\ &= \frac{N(s)}{D(s)} \left(\frac{0.5U e^{j\varphi}}{s - j\omega_0} + \frac{0.5U e^{-j\varphi}}{s + j\omega_0} \right) = \frac{N_1(s)}{D(s)} + \left(\frac{0.5Y e^{j\varphi_y}}{s - j\omega_0} + \frac{0.5Y e^{-j\varphi_y}}{s + j\omega_0} \right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

dove $\frac{N_1(s)}{D(s)}$ rappresenta il transitorio del circuito (destinato a sparire dal momento che il circuito è stabile per ipotesi) e gli altri due addendi la soluzione a regime. Mettendo a denominatore comune gli ultimi due fattori e ponendo $s = j\omega_0$, risulta:

$$N(j\omega_0) j\omega_0 U e^{j\varphi} = D(j\omega_0) j\omega_0 Y e^{j\varphi_y} \Rightarrow Y e^{j\varphi_y} = \frac{N(j\omega_0)}{D(j\omega_0)} U e^{j\varphi} \Rightarrow H'(j\omega_0) = H(j\omega_0) \quad (8.10)$$

Ricordiamo che deve essere verificata la condizione posta all'inizio, che l'asse immaginario faccia parte del dominio di convergenza della $H(s)$.

Abbiamo aggiunto un ulteriore elemento al quadro che ci stiamo facendo sulle proprietà della $H(s)$:

1. $H(s)$ determina, tramite i suoi poli, se il circuito è stabile o no;
2. $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$ è la risposta nel dominio del tempo all'impulso;
3. $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} = y(t)$ è la risposta nel dominio del tempo ad un qualsiasi ingresso che sia \mathcal{L} -trasformabile;
4. $H(j\omega)$ dà informazioni sul comportamento in frequenza del circuito.

Vediamo che relazione c'è tra la funzione $H(j\omega)$ calcolata sul semi-asse negativo rispetto a quello positivo. Ricordando le proprietà dei numeri complessi, possiamo scrivere che:

$$H(-j\omega) = H(j\omega^*) = H^*(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |H(-j\omega)| = |H(j\omega)| \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{cases} \quad (8.11)$$

e ancora:

$$|H(j\omega)|^2 = G(\omega^2) = H(j\omega) H^*(j\omega) = H(j\omega) H(-j\omega) \underbrace{=}_{j\omega = s} H(s) H(-s) = G(-s^2) \quad (8.12)$$

Il prossimo passo sarà quello di studiare e visualizzare la funzione complessa di variabile complessa $H(j\omega)$ in funzione di ω .

8.3 Diagrammi di Nyquist

La funzione $H(j\omega)$ è composta da una parte reale e una immaginaria, per cui:

$$H(j\omega) = \text{Re} \{H(j\omega)\} + j \text{Im} \{H(j\omega)\} \quad (8.13)$$

Possiamo, allora, disegnare una curva nel piano $[\text{Re} \{H(j\omega)\}, \text{Im} \{H(j\omega)\}]$, con parametro ω , chiamata *diagramma di Nyquist o polare*. Ricordando la proprietà dimostrata in (8.11), la curva sarà disegnata soltanto per $\omega \geq 0$. Questo tipo di rappresentazione è usato soprattutto nei controlli automatici, in quanto dà informazioni sulla stabilità di un anello chiuso reazionato.

8.4 Diagrammi di Bode

La funzione $H(j\omega)$ è anche esprimibile con il modulo e la fase, per cui:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \exp(j\varphi(\omega)) \quad (8.14)$$

dove $|H(j\omega)|$ è il modulo di $H(j\omega)$ e $\varphi(\omega)$ è la fase di $H(j\omega)$. Si possono allora disegnare due grafici aventi, entrambi, ω in ascissa e, rispettivamente, il modulo $|H(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega)$ in ordinata. Ricordando la proprietà dimostrata in (8.11), possiamo limitarci a disegnare il modulo e la fase sul semi-asse positivo $\omega \geq 0$.

Dal momento che la dinamica dei moduli e delle rispettive frequenze copre parecchi ordini di grandezza, è impensabile disegnare dei grafici con scala lineare in quanto risulterebbero totalmente illeggibili. E' allora indispensabile passare a una scala logaritmica per le frequenze e i moduli, mentre la fase rimane in scala lineare. Un altro vantaggio di questa rappresentazione logaritmica è che i prodotti e i rapporti vengono trasformati in somme e differenze, con conseguente vantaggio nel disegno dei diagrammi di Bode di $H(j\omega)$, come vedremo in seguito.

Sostituendo $s = j\omega$ in (8.4), otteniamo:

$$H(j\omega) = K (j\omega)^u \frac{\prod_{m=1}^{M_{zr}} \left(1 + \frac{j\omega}{\sigma_{zm}}\right) \prod_{m=1}^{M_{zc}} \left(1 + \frac{j\omega}{q_{zm}\omega_{0zm}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0zm}^2}\right)}{\prod_{m=1}^{M_{pr}} \left(1 + \frac{j\omega}{\sigma_{pm}}\right) \prod_{m=1}^{M_{pc}} \left(1 + \frac{j\omega}{q_{pm}\omega_{0pm}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0pm}^2}\right)}. \quad (8.15)$$

Calcoliamo il modulo quadrato, ricordando che il modulo di un prodotto è il prodotto dei moduli:

$$|H(j\omega)|^2 = |K|^2 \omega^{2u} \frac{\prod_{m=1}^{M_{zr}} \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{zm}^2}\right) \prod_{m=1}^{M_{zc}} \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0zm}^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{q_{zm}^2 \omega_{0zm}^2}\right)}{\prod_{m=1}^{M_{pr}} \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{pm}^2}\right) \prod_{m=1}^{M_{pc}} \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0pm}^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{q_{pm}^2 \omega_{0pm}^2}\right)} \quad (8.16)$$

e la fase:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = & \varphi(K) + u \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{M_{zr}} \text{arctg} \left(\frac{\omega}{\sigma_{zm}}\right) + \sum_{m=1}^{M_{zc}} \varphi \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0zm}^2} + \frac{j\omega}{q_{zm}\omega_{0zm}}\right) - \\ & - \sum_{m=1}^{M_{pr}} \text{arctg} \left(\frac{\omega}{\sigma_{pm}}\right) - \sum_{m=1}^{M_{pc}} \varphi \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0pm}^2} + \frac{j\omega}{q_{pm}\omega_{0pm}}\right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Mentre la fase è già additiva, il modulo quadrato lo diventa passando ai logaritmi. Definiamo una nuova unità di misura per il modulo, chiamato *decibel* (dB):

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |H(j\omega)| = 10 \log |H(j\omega)|^2, \quad (8.18)$$

mentre per l'inverso del modulo, definiamo l'*attenuazione*, sempre calcolata in dB:

$$\alpha^H(\omega)_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{1}{|H(j\omega)|^2} \right) = -10 \log |H(j\omega)|^2 = -20 \log |H(j\omega)|$$

L'attenuazione, espressa in dB, diventa:

$$\begin{aligned} \alpha^H(\omega)_{\text{dB}} = & -10 \log |H(j\omega)|^2 = -10 \log |K|^2 - u 10 \log \omega^2 - \\ & 10 \sum_{m=1}^{M_{zr}} \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{zm}^2} \right) - 10 \sum_{m=1}^{M_{zc}} \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0zm}^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{q_{zm}^2 \omega_{0zm}^2} \right) + \\ & 10 \sum_{m=1}^{M_{pr}} \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma_{pm}^2} \right) + 10 \sum_{m=1}^{M_{pc}} \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0pm}^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{q_{pm}^2 \omega_{0pm}^2} \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

I diagrammi di Bode sono una coppia di grafici che hanno in ascissa, entrambi, $\log \omega$ ($\omega > 0$) e in ordinata, rispettivamente, il modulo in decibel $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$ (l'attenuazione $\alpha^H(\omega)_{\text{dB}}$) e la fase $\varphi(\omega)$. Per quanto riguarda l'ascissa, vediamo qual'è il rapporto ω_2/ω_1 quando i rispettivi logaritmi distano di un'unità:

$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = 1 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10, \quad (8.20)$$

da cui il nome di *decade* per due frequenze a distanza unitaria nei logaritmi.

Per la proprietà additiva, i diagrammi di Bode possono essere disegnati a partire dai singoli fattori, che vengono poi sommati. Esaminiamo quindi i singoli fattori:

$$1. H(j\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |K| \\ \varphi(\omega) = \varphi(K) = \begin{cases} 0 + 2k\pi & \text{se } K > 0 \\ \pi + 2k\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}, k \in \mathcal{Z} \end{cases}; \text{ il grafico del}$$

modulo è una retta costante, mentre il grafico della fase è una retta costante a 0, π o $-\pi$, a seconda del segno di K .

$$2. H(j\omega) = (j\omega)^u \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 u \log \omega \\ \varphi(\omega) = u \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathcal{Z} \end{cases}; \text{ il grafico del modulo è una retta}$$

con pendenza $20u$ dB/dec, mentre il grafico della fase è una retta costante a ordinata $u \frac{\pi}{2}$.

$$3. H(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{\sigma} \right)^u, u = \begin{cases} 1 & \text{zero} \\ -1 & \text{polo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 10 u \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) \\ \varphi(\omega) = u \arctg \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) + 2k\pi, k \in \mathcal{Z} \end{cases};$$

per quanto riguarda il modulo, consideriamo le frequenze angolari $\omega \gg |\sigma| \Rightarrow |H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20u \log \frac{\omega}{|\sigma|} = 20u \log \omega - 20u \log |\sigma|$; è una retta con pendenza $20u$

dB/dec che passa per il punto $\log|\sigma|$. Se $-\sigma$ è un polo, la retta scenderà con 20 dB/dec, mentre se $-\sigma$ è uno zero, allora la retta salirà con 20 dB/dec. Consideriamo ora le frequenze angolari $\omega \ll |\sigma| \Rightarrow |H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20u \log 1 = 0$; se prolunghiamo le due rette fino ad incontrarsi in $\log|\sigma|$, otteniamo il diagramma asintotico di Bode, che è una funzione lineare a tratti. L'errore massimo tra il diagramma asintotico e quello esatto è di 3 dB, per polo o zero, nel punto $\omega = |\sigma|$. Inatti si ha: $|H(j|\sigma)|_{\text{dB}} = 10u \log(1+1) = u3 \text{ dB}$. Per quanto riguarda la fase, è una arcotangente ascendente se σ uno zero a parte reale negativa, discendente se σ è un polo a parte reale negativa (stabile) o uno zero a parte reale positiva, con una rotazione assoluta di $\pi/2$ tra gli estremi del grafico: $0 \leq \omega < +\infty$ grafico lineare, $-\infty \leq \log \omega < +\infty$ grafico semilogaritmico. Il valore della fase in $\omega = |\sigma|$ è: $\varphi(|\sigma|) = u \arctg\left(\frac{|\sigma|}{\sigma}\right) = u \text{sign}(\sigma) \pi/4$. Il diagramma asintotico della fase è una spezzata con una parte costante a zero fino a $\omega = |\sigma|$ e a $\pm\pi/2$ da $\omega = |\sigma|$ in poi.

4. $H(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^u$, $u = \begin{cases} 1 & \text{zeri} \\ -1 & \text{poli} \end{cases}$; il grafico è più complesso dei casi

precedenti. Possiamo pensare che il grafico asintotico sia corrispondente a quello di una coppia di zeri reali posti a $\omega = \omega_0$, con rette pendenti 40 dB/dec e rotazioni di fase tra l'origine (in ω) e l'infinito di π . Il grafico reale presenta una "gobba" in $\omega = \omega_0$, tanto più accentuata quanto più vicini sono i poli, a parità di modulo ω_0 , all'asse immaginario.

Dobbiamo ora procedere alla somma dei singoli fattori per ottenere il grafico complessivo. Se abbiamo a disposizione un programma di calcolo (ad esempio Matlab), il problema ovviamente non si pone. Se, invece, dobbiamo disegnare a mano i nostri grafici, dobbiamo per forza fare qualche approssimazione.

Supponiamo di dover disegnare il grafico di una funzione che abbia tutti i poli e zeri lontani tra loro almeno di una decade (il loro rapporto è maggiore di 10), allora possiamo disegnare il cosiddetto *diagramma asintotico* di Bode. E' formato dalla somma dei diagrammi asintotici dei singoli fattori visti nell'elenco sopra. Dal momento che i relativi poli e zeri distano di almeno una decade tra loro, le spezzate dei grafici non interferiscono tra loro.

- Modulo: Sarà sufficiente partire dal valore della costante in dB e poi procedere ad alzare o abbassare la pendenza di $u20$ dB/dec in ogni zero o polo. Notate che il punto $\omega = 0$ viene trasformato dai logaritmi nel punto a $-\infty$, mentre il punto $\omega = 1$ viene trasformato nell'origine degli assi del grafico logaritmico. Quindi eventuali zeri o poli nell'origine producono rette con pendenza $u20$ che attraversano l'asse delle ordinate in $20 \log |K|$.
- Fase: la fase è costante a tratti: i poli a parte reale negativa e gli zeri a parte reale positiva producono un abbassamento, mentre gli zeri a parte reale negativa producono un innalzamento della fase. Vale lo stesso discorso fatto prima per eventuali poli o zeri nell'origine.

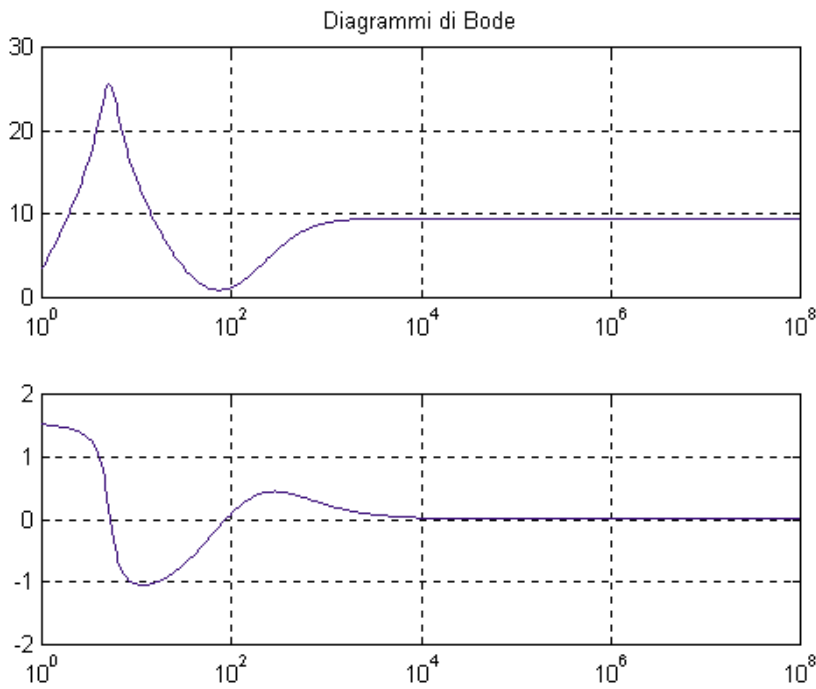


Fig. 1: Modulo e fase della funzione esempio.

8.5 Esempio con Matlab

Diamo un esempio di diagramma di Bode disegnato con Matlab. La funzione è:

$$H(s) = \frac{3s(s+50)(s+100)}{(s^2+2s+26)(s+400)} = \frac{75}{52} \frac{\left(1 + \frac{s}{50}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{13} + \frac{s^2}{26}\right) \left(1 + \frac{s}{400}\right)}. \quad (8.21)$$

Il programma Matlab usato è riportato sotto, mentre i relativi diagrammi sono riportati in Figura 1.

```
% funzione di rete: diagrammi di Bode
s = logspace(0,4,500)*j;
Num = 3*s.*(s + 50).*(s + 100);
Den = (s.^2 + 2*s + 26).*(s + 400);
M = abs(Num./Den);
P = angle(Num./Den);
Pdeg = P*180/pi;
MdB = 20.* log10(M);
semilogx(imag(s),MdB);
title('Diagrammi di Bode');
%semilogx(imag(s),P),
grid on;
```

8.6 Circuiti risonanti

Accingiamoci a studiare il comportamento in frequenza del circuito risonante serie già trattato nel Sottocapitolo (7.2). La funzione di rete $H(j\omega)$ lega la tensione sulla resistenza a quella del generatore. Elaborando la funzione, si ottiene:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}, \quad (8.22)$$

dove Q è il *fattore di qualità* del risonante e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ è la *frequenza di risonanza*. Tanto più Q è elevato, tanto più il risonatore si avvicina alla condizione ideale. La sua espressione è:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}. \quad (8.23)$$

La condizione espressa in (7.13) per ottenere la risonanza si traduce in: $Q > 0.5$. Introducendo la frequenza normalizzata $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, la funzione $H(\cdot)$ diventa:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}. \quad (8.24)$$

Il diagramma lineare di $|H(j\Omega)|$ si presenta con la classica forma a campana, con il massimo nella frequenza di risonanza $\Omega = 1$:

$$|H(j0)| = 0, \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} |H(j\Omega)| = 0, \quad |H(j1)| = 1. \quad (8.25)$$

Il diagramma della fase ha un andamento discendente:

$$\varphi(j0) = \pi/2, \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \varphi(j\Omega) = -\pi/2, \quad \varphi(j1) = 0.$$

Ci restano soltanto da trovare i valori della frequenza normalizzata Ω^+ e Ω^- per cui si ha: $|H(j\Omega^+)| = |H(j\Omega^-)| = 1/\sqrt{2}$. Eseguendo gli opportuni calcoli, si trova:

$$\begin{cases} \Omega^+ \Omega^- = 1 \\ \Omega^+ - \Omega^- = \frac{1}{Q} \end{cases}, \quad (8.26)$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \omega^+ \omega^- = \omega_0^2 \\ \omega^+ - \omega^- = \frac{\omega_0}{Q} \end{cases}. \quad (8.27)$$

Quindi la campana si restringe tanto più ideale è il risonatore, cioè tanto più elevato è il fattore Q . Infatti la banda $\omega^+ - \omega^-$ risulta più stretta all'aumentare di Q . Inoltre i poli si avvicinano all'asse immaginario, a parità del modulo ω_0 . Notiamo che $\varphi(\omega^-) = \pi/4$ e $\varphi(\omega^+) = -\pi/4$, per cui la fase, all'aumentare di Q , varia più rapidamente attorno alla frequenza di risonanza.

Lo stesso discorso può essere fatto per i risonatori parallelo. La funzione di rete che lega la corrente sulla conduttanza G a quella del generatore di corrente è uguale alla (8.24). L'unica differenza sta nella definizione del fattore di qualità, che risulta:

$$Q^p = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G}.$$